詳細解答

STEP II 1987，第 14 題

力學 • 圓錐上的彈性帶

> **STEP II 1987，第 14 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/87-s2-q14

關鍵思路

由於橡皮圈在圓錐上始終保持為一個水平圓，它的整個狀態只需一個數便可描述：它沿母線（generator）量度與頂點（vertex）的距離 s。因此我們只需追蹤一小段元素。張力（tension）產生的向內拉力有一個沿圓錐面的分量，推動該元素沿母線移動；另有一個垂直於圓錐面的分量，被光滑的圓錐抵消。把 s 換成長度 x，便得到簡諧運動（simple harmonic motion），而橡皮圈在四分之一個週期（period）後變得鬆弛（slack）。

解答

模型。 我們把橡皮圈視為一條質量為 m、沿圓周均勻分佈的細彈性弦。圓錐是光滑的，所以它對每一小段的反作用力都垂直於圓錐面；我們亦忽略重力。由對稱性，每一小段的運動方式都相同，所以橡皮圈始終是一個以軸為圓心的圓。設它沿母線量度與頂點的距離為 $s(t)$。由於每條母線與軸成角 α，它的半徑便是 $s\sin\alpha$，因此

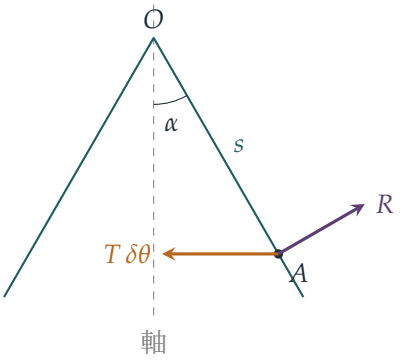
$$x = 2\pi s\sin\alpha.$$

當橡皮圈被拉伸時（$x > l$），胡克定律（Hooke's law）給出張力 $T = \dfrac{\lambda(x-l)}{l}$。

作用於一小段的力。 取一小段在軸上所對的角為 $\delta\theta$。它佔整條橡皮圈的 $\delta\theta/2\pi$，所以其質量為 $\dfrac{m\,\delta\theta}{2\pi}$。作用於它的力有兩個：

- 題目給出、由張力產生的力 $T\,\delta\theta$，垂直於軸並指向軸；
- 圓錐的法向反作用力（normal reaction）R，垂直於經過該小段的母線。

下圖顯示包含軸和該小段的平面。



該小段被限制在圓錐面上，所以只能沿母線 OA 移動。我們沿這個方向及其垂直方向分解力。力 $T\,\delta\theta$ 垂直於軸，而母線與軸成角 α，所以 $T\,\delta\theta$ 與方向 $\overrightarrow{AO}$ 之間的夾角是 $90^\circ - \alpha$。因此：

- 沿 $\overrightarrow{AO}$（指向頂點）的方向，$T\,\delta\theta$ 的分量是 $T\,\delta\theta\cos(90^\circ - \alpha) = T\,\delta\theta\sin\alpha$，而 R 在此方向沒有分量；
- 在垂直於圓錐面的方向，由於該方向沒有運動，$R = T\,\delta\theta\cos\alpha$。

由於 $R \geq 0$，橡皮圈確實一直緊貼圓錐。

想一想 為甚麼我們不能直接說向內的力 $T\,\delta\theta$ 令半徑縮小？

該小段不能直接向軸移動，因為圓錐擋住了去路。只有 $T\,\delta\theta$ 沿圓錐面的部分會產生加速度，其餘部分被反作用力抵消。因子 $\sin\alpha$ 正是由此而來；這與光滑斜面上的珠子沿斜面只受 $mg\sin\theta$ 的道理相同。

運動方程。 對該小段沿母線應用牛頓第二定律（Newton's second law），並取 s 以遠離頂點為正方向，得

$$\frac{m\,\delta\theta}{2\pi}\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -T\,\delta\theta\sin\alpha \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{2\pi T\sin\alpha}{m}.$$

$\delta\theta$ 被消去，所以每一小段都服從同一條方程，這證實了橡皮圈保持圓形。由於 $x = 2\pi s\sin\alpha$ 而 α 是常數，所以

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = 2\pi\sin\alpha\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{4\pi^2 T\sin^2\alpha}{m} = -\frac{4\pi^2\lambda}{ml}(x-l)\sin^2\alpha,$$

其中用了 $T = \lambda(x-l)/l$。此式在橡皮圈拉緊時成立，即對 $0 < t < t_0$ 成立，整理後便得所求方程。 □

求 t_0。 設 $y = x - l$ 及 $\omega^2 = \dfrac{4\pi^2\lambda\sin^2\alpha}{ml}$，則 $\ddot{y} = -\omega^2 y$，即繞 $y = 0$ 的簡諧運動。設 $x_0 > l$ 為初始長度（橡皮圈是被推上去的，所以開始時處於拉伸狀態）。橡皮圈由靜止釋

放，所以 $\dot{y}(0) = 0$，故

$$x - l = (x_0 - l)\cos\omega t.$$

當 x 首次降至 l，即 $\cos\omega t = 0$ 首次成立時，橡皮圈變得鬆弛，所以 $\omega t_0 = \frac{\pi}{2}$。由於 $\omega = 2\pi\sin\alpha\sqrt{\lambda/(ml)}$，

$$t_0 = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{1}{4\sin\alpha}\sqrt{\frac{ml}{\lambda}}.$$

留意 t_0 與橡皮圈被拉伸了多少無關，這是簡諧運動的典型特徵：無論振幅（amplitude）多大，四分之一週期都是一樣的。

驗算

- 單位：λ 是一個力，所以 ml/λ 的單位是 $\mathrm{kg\,m/N} = \mathrm{s}^2$，而 t_0 是一個時間。
- 極限情況：當 $\alpha \to \frac{\pi}{2}$ 時，圓錐變平成為一個平面，橡皮圈直接向中心收縮，$t_0 = \frac{1}{4}\sqrt{ml/\lambda}$。當 $\alpha \to 0$ 時，圓錐變成圓柱，張力沒有沿圓柱面的分量，而 $t_0 \to \infty$，正合預期。
- 數值驗證：取 $\alpha = 30°$、$m = 1$、$l = 1$ 及 $\lambda = 4$，公式給出 $t_0 = \frac{1}{4}$。對隨機選取的參數，以數值方法逐步求解該小段的運動方程（並另外在三維空間中直接計算一條精細多邊形橡皮圈所受的淨張力），均能準確到多個小數位地重現因子 $\sin\alpha$ 及 t_0。

常見錯誤

- 忘記圓錐的反作用力，對半徑 r 寫出 $\frac{m\,\delta\theta}{2\pi}\ddot{r} = -T\,\delta\theta$。這樣會完全漏掉因子 $\sin^2\alpha$。
- 把該小段的質量寫成 m，而不是 $\frac{m\,\delta\theta}{2\pi}$。
- 以整個週期或半個週期作為 t_0：橡皮圈由最大拉伸開始，所以經過四分之一週期便回到自然長度（natural length）。

STEP 之外

題目給出的力 $T\,\delta\theta$ 是一個普遍事實的小角度版本：一條張力為 T、曲率半徑（radius of curvature）為 ρ 的弦，每單位長度向側面施加大小為 T/ρ 的力。把同一想法推廣到曲面，便能解釋為何肥皂泡內的壓強大於外面的壓強（拉普拉斯定律（Laplace's law））。受限於曲面上的運動，最簡潔的處理方法是拉格朗日力學（Lagrangian mechanics），在其中反作用力根本無需出現。Kleppner 和 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）收錄了許多關於受張力的弦及受約束運動的題目。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。