詳細解答

STEP II 1987，第 13 題

力學 • 與牆壁的斜碰撞

> **STEP II 1987，第 13 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/87-s2-q13

關鍵思路

光滑（smooth）的檯邊只能改變垂直於它的速度分量（component）。這個分量會反向並乘以 e，而沿檯邊方向的分量則保持不變。兩條相鄰的檯邊分別作用於兩個不同的分量，所以每個分量各被反向並乘以 e 一次。至於閉合路徑，我們用坐標追蹤圓盤由一條檯邊到另一條檯邊的運動，並選取唯一可自由調節的量，即初始斜率（slope），使圓盤回到出發點。

解答

模型。圓盤視為一個質點（particle），在設有光滑檯邊的光滑水平檯面上滑動，因此兩次碰撞之間沒有任何力作用於它，它以等速沿直線運動。碰撞時，檯邊施加的衝量（impulse）垂直於檯邊（因為檯邊光滑），所以速度的平行分量不變。根據牛頓恢復定律（Newton's law of restitution），垂直分量反向並乘以 e。我們設 $0 < e \leq 1$。

沿檯面的兩條邊設坐標軸，使檯面為 $0 \leq x \leq L$、$0 \leq y \leq B$。

第 (i) 部分：兩條相鄰的檯邊

設圓盤的速度為 (u, v)。相鄰的檯邊是一條形如 $x =$ 常數 的檯邊和一條形如 $y =$ 常數 的檯邊，碰撞次序不限。撞擊 x 檯邊使 $(u, v) \mapsto (-eu, v)$，撞擊 y 檯邊使 $(u, v) \mapsto (u, -ev)$。兩者各撞一次後，無論次序如何，速度均為

$$(-eu,\ -ev) = -e\,(u, v).$$

這是原速度的純量倍數，所以最後的路徑與原路徑平行，正如所求。此時圓盤沿相反方向運動，速率減為原來的 e 倍。

第 (ii) 部分：從檯邊出發的閉合路徑

設圓盤靜止於檯邊 $y=0$ 上的點 $P=(a,0)$，且 $a:(L-a)=z:1$，於是

$$a=\frac{zL}{1+z},\qquad L-a=\frac{L}{1+z},\qquad 0<a<L.$$

從上方俯視檯面，x 向右、y 向上，由檯邊 $y=0$ 開始順時針方向，依次遇到 $x=0$、$y=B$，然後是 $x=L$。若比例是從另一端量度，則把 z 換成 $1/z$，論證不變。以速度 $(-u,v)$ 擊出圓盤，其中 $u,v>0$，並記斜率為 $k=v/u$。四段路程上的速度依次為

$$(-u,v)\xrightarrow{x=0}(eu,v)\xrightarrow{y=B}(eu,-ev)\xrightarrow{x=L}(-e^2u,-ev)\xrightarrow{y=0}\cdots$$

- 第 1 段，由 $(a,0)$ 至 $x=0$：水平走過距離 a，上升 ak，所以撞擊左檯邊於 $W_1=(0,\,ak)$。
- 第 2 段，斜率為 $v/(eu)=k/e$：上升 $B-ak$，因此橫向移動 $e(B-ak)/k$。它在 $W_2=\big(e(B/k-a),\,B\big)$ 碰到頂邊。
- 第 3 段，斜率為 $-k$：橫向移動 $L-x_{W_2}$，下降 $k(L-x_{W_2})$，所以在高度 $y_{W_3}=B-kL+e(B-ak)$ 處碰到右檯邊。
- 第 4 段，斜率為 k/e：下降 y_{W_3}，向回移動 $e\,y_{W_3}/k$，到達 $y=0$ 時位於

$$x_{\text{end}}=L-\frac{e\,y_{W_3}}{k}=(1+e)L+e^2a-\frac{e(1+e)B}{k}.$$

我們要求 $x_{\text{end}}=a$。由此得 $e(1+e)B/k=(1+e)L-(1-e^2)a=(1+e)\big(L-(1-e)a\big)$，所以

$$k=\frac{eB}{L-(1-e)a}=\frac{B}{L}\cdot\frac{e(1+z)}{1+ez}.$$

由於 $L-(1-e)a>L-a>0$，對每個 $z>0$，這都是正數。

想一想 我們完成了嗎？我們假設了圓盤依左、上、右、下的次序碰到檯邊。

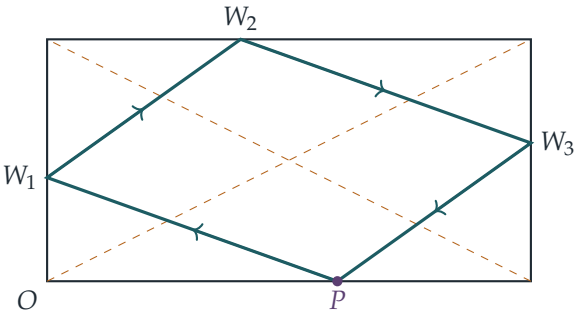
還未完成。我們仍須驗證每個碰撞點確實落在我們假設的那條邊上。記 $D=L-(1-e)a=L-a+ea$，則 $k=eB/D$。於是

$$\begin{aligned}
y_{W_1}&=ak=\frac{eaB}{D},\\
x_{W_2}&=e\Big(\frac{D}{e}-a\Big)=L-a,\\
y_{W_3}&=B(1+e)-k(L+ea)=\frac{B\big[(1+e)(L-a+ea)-eL-e^2a\big]}{D}=\frac{B(L-a)}{D}.
\end{aligned}$$

由於 $0<a<L$ 及 $e>0$，我們有 $0<ea<D$ 及 $0<L-a<D$。所以 $0<y_{W_1}<B$、$0<x_{W_2}<L$ 及 $0<y_{W_3}<B$。每次碰撞都落在我們假設的那條邊（不含端點）上，不會

撞到角位。因此對每個 z，以上述斜率 k 擊出的圓盤會依次經過左、上、右檯邊，然後回到 P。

由第 (i) 部分，第 1 段與第 3 段平行，第 2 段與第 4 段亦平行，所以這條閉合路徑是內接於檯面的平行四邊形（parallelogram）$PW_1W_2W_3$。



虛線是對角線（diagonal）。圖中路徑取 $L = 2B$、$e = \frac{1}{2}$ 及 $z = 1.5$。

第 (iii) 部分：從任意內點出發的兩種擊法

*每一種這樣的擊法都是第 (ii) 部分的路徑之一。*設圓盤從內點（interior point）Q 以速度 $\mathbf{w}$ 出發，依順時針次序在四條檯邊上的 V_1, V_2, V_3, V_4 反彈，然後回到 Q。應用第 (i) 部分兩次：四次反彈後速度為 $(-e)^2\mathbf{w} = e^2\mathbf{w}$，與原速度方向相同。因此最後一段 V_4Q 與第一段 QV_1 位於同一直線上，且方向相同。所以 $V_4 \to Q \to V_1$ 是同一段直線路程，圓盤的路徑是一條從檯邊上的 V_4 出發、順時針在其餘三條檯邊反彈後回到 V_4 的閉合路徑。第 (ii) 部分的推導顯示，這種路徑的斜率由其起點唯一決定。每條這樣的路徑在每條邊上各有一個頂點，所以它們全都是第 (ii) 部分中的平行四邊形 Π_a（$0 < a < L$），而 Q 位於 Π_a 的某條邊上。反之，若 Q 位於某個 Π_a 的一條邊上，從 Q 沿該邊按行進方向擊出即可。因此我們要數出通過 Q 的（平行四邊形，邊）組合的數目。

*當 z 改變時，各邊如何掃過檯面。*當 z 由 0 增至 ∞，a 由 0 增至 L。由上面的公式，y_{W_1} 由 0 增至 B，$x_{W_2} = L - a$ 由 L 減至 0，而 $y_{W_3} = B/\big(1 + ea/(L-a)\big)$ 由 B 減至 0。所以 Π_a 起初是通過 O 的對角線（當 $a \to 0$ 時，各頂點聚集到角位 O 和 (L, B)），最後變成另一條對角線。現在考慮其中一條邊，例如 PW_1。它在角位 O 處截出一個三角形，兩條直角邊分別是沿底邊的 a 和沿左邊向上的 y_{W_1}。兩條直角邊都隨 a 嚴格遞增，所以這些三角形嚴格地一個套一個，其斜邊永不相交。它們由無到有連續地增長，直至成為檯面在由 $(L, 0)$ 至 $(0, B)$ 的對角線以下的一半。準確地說，若 $Q = (q_1, q_2)$ 位於這一半之中，則函數

$$f(a) = \frac{q_1}{a} + \frac{q_2}{y_{W_1}(a)}$$

是連續（continuous）且嚴格遞減（strictly decreasing）的。當 $a \to 0$ 時它趨於 ∞，當

$a \to L$ 時它趨於 $q_1/L + q_2/B < 1$，所以恰好有一個 a 使 $f(a) = 1$（即 Q 位於 PW_1 上）。若 Q 不在這一半之中，則對每個 a 都有 $f(a) > 1$，PW_1 永不通過 Q。同樣的論證適用於每條邊：

- PW_1 掃過由 $(L, 0)$ 至 $(0, B)$ 的對角線以下的半個檯面一次；
- W_2W_3 掃過該對角線以上的半個檯面一次；
- W_1W_2 掃過由 O 至 (L, B) 的對角線以上的半個檯面一次；
- W_3P 掃過該對角線以下的半個檯面一次。

一個不在檯邊上、也不在對角線上的點 Q，恰好位於每條對角線的某一側。所以恰好有兩條邊通過它，而且分屬兩個不同的平行四邊形。這就是那兩種擊法：每一種都使圓盤沿該邊出發，順時針繞經四條檯邊後回到 Q。（若 Q 位於對角線上，其中一種擊法會退化為射向角位的一擊。）

驗算

- 當 $e = 1$ 時，對每個 z 斜率都是 $k = B/L$，所以所有邊都與對角線平行。這正是對完全彈性檯邊使用常見的鏡像展開（unfolding）方法所得的結果。
- 取 $L = 2$、$B = 1$、$e = \frac{1}{2}$、$z = 1$：則 $a = 1$、$k = \frac{1}{3}$，碰撞點為 $(0, \frac{1}{3})$、$(1, 1)$ 及 $(2, \frac{2}{3})$。最後一段有 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}y = e/k = \frac{3}{2}$，所以下降 $\frac{2}{3}$ 時向回移動 1，到達 $(1, 0) = P$。
- 在一個逐次計算圓盤由一邊到另一邊的數值模擬中，三個部分的結論都成立：隨機選取的檯面、e 值和 z 值都給出預測的碰撞點，而隨機選取的內點都恰好位於兩條閉合路徑上。

常見錯誤

- 使用鏡像（展開）技巧：當 $e < 1$ 時，反射角不等於入射角，所以這技巧失效。
- 由 $x_{\text{end}} = a$ 求得 k 後，沒有驗證每次碰撞是否落在預期的邊上。
- 在第 (iii) 部分中，假設從 Q 出發的擊法必須沿某一特定的邊開始。正是第 (i) 部分的論證把第一段與最後一段連成同一段直線路程。

STEP 之外

這類路徑稱為撞球（billiards）問題。當 $e = 1$ 時，它本身就是一個完整的學科，以反射和展開來研究，並通向動力系統（dynamical systems）。這裏的檯邊會損失能量，而「一

圈前的速度 $\mapsto$ 一圈後的速度」這個映射純粹是乘以 e^2 的縮放。這就是為何對每個 e 都存在閉合軌道，儘管圓盤每繞一圈都會減速。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）對衝量和恢復有仔細的講解。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《數學進階難題》）收錄了更多同類型的題目。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。