詳細解答

STEP II 1987，第 12 題

力學 • 平衡與能量

> **STEP II 1987，第 12 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/87-s2-q12

關鍵思路

「在每個位置都處於平衡（equilibrium）」其實是關於勢能（potential energy）的陳述：如果珠子（bead）可以停在線上的任何位置，那麼珠子沿線滑動時，系統的勢能就不會改變，所以勢能在線上必須是常數。用珠子的高度及它與環的距離寫出這個能量，便立即得到曲線的方程。同一事實也令第二部分變得簡潔：勢能既然是常數，能量守恆（conservation of energy）便告訴我們珠子與質點的總動能（kinetic energy）是常數，餘下的只是一些把兩個速率聯繫起來的幾何。

解答

我們把珠子和懸掛的質量視為質點，繩視為輕而不可伸長（inextensible），環和線視為光滑。把環放在原點 O，y 垂直向上量度。設珠子位於極坐標（polar coordinates）(r,θ)，其中 θ 由水平方向逆時針量度，因此珠子相對於 O 的高度是 $y = r\sin\theta$。設 L 為繩的長度。

曲線的方程

由 O 到珠子的一段繩長 r，所以懸掛的質點位於環下方距離 $L - r$ 處。取 O 為零勢能水平，系統的勢能是

$$V = mgr\sin\theta - mg(L - r) = mg\left(r + r\sin\theta\right) - mgL.$$

線是光滑的，所以它對珠子的反作用力垂直於線，能使系統沿線移動的力只來自 V。系統在某位置處於平衡，當且僅當 V 在該處對沿線的移動取駐值。在每個位置都平衡，意

味着沿整條線都有 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}s = 0$（其中 s 為弧長（arc length)），所以 V 在線上是常數：

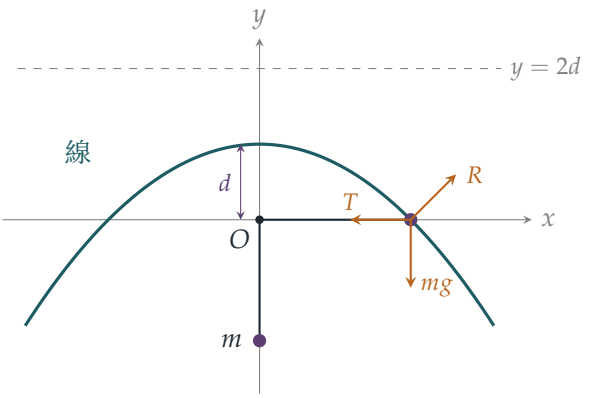
$$r(1+\sin\theta) = c \quad \text{對某常數} c.$$

用分解力的方法也可以看到這一點。平衡時，懸掛的質點令整條繩的張力（tension）為 mg（環是光滑的）。在珠子上，指向 O 的張力 mg 的切向分量是 $-mg\,\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}$，而重力的切向分量是 $-mg\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}$。兩者必須抵消，所以 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(r+y) = 0$，這正是同一條件。

求 c：由於 $1+\sin\theta \le 2$，我們有 $r = c/(1+\sin\theta) \ge c/2$，等號在 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 時成立（即線上位於環正上方的點）。所以環到線的最短距離是 $c/2$，由此得 $c = 2d$，而曲線是

$$\boxed{r(1+\sin\theta) = 2d} \qquad \text{即} \qquad r = \frac{2d}{1+\sin\theta}.$$

（如果改為由向下的鉛垂線量度 θ，同一曲線寫成 $r(1-\cos\theta) = 2d$。）由於 $r = 2d - y$，線上每一點與 O 的距離都等於它與水平線 $y = 2d$ 的距離。所以這條線是一條拋物線（parabola），焦點（focus）在環上，準線（directrix）在環上方高度 $2d$ 處；以直角坐標表示為 $x^2 = 4d(d-y)$，頂點為 $(0, d)$。



圖中珠子與環處於同一水平；張力 $T = mg$、重力 mg 和法向反作用力（normal reaction）R 互相平衡，因為拋物線在該處的斜率恰好是 -1。

珠子的速率

現在珠子以速率 u 沿線移動。繩保持拉緊，長度不變，所以懸掛的質點仍位於環下方距離 $L - r$ 處。

想一想 懸掛的質點移動得多快？

它在環下方的深度是 $L - r$，所以它的速度是垂直的，速率為 $|\dot{r}|$。注意 $\dot{r}$ 只是珠子速度的徑向部分，而不是它的整個速率 u。

一旦開始運動，張力便不再是 mg，但它對系統不做淨功：繩不可伸長而環光滑，所以張力對珠子所做的功與它對懸掛質點所做的功互相抵消。線的反作用力垂直於珠子的運動，不做功。所以能量守恆：

$$\tfrac{1}{2}mu^2 + \tfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + V = \text{常數}.$$

但由第一部分，在線上 $V = mg\cdot 2d - mgL$ 是常數。因此

$$u^2 + \dot{r}^2 = \text{常數}. \qquad (*)$$

接着把 $\dot{r}$ 與 u 聯繫起來。對 $r = 2d/(1+\sin\theta)$ 求導，

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{2d\cos\theta}{(1+\sin\theta)^2} = -\frac{r\cos\theta}{1+\sin\theta}, \qquad \text{所以} \qquad \dot{r}^2 = r^2\dot{\theta}^2\,\frac{\cos^2\theta}{(1+\sin\theta)^2} = r^2\dot{\theta}^2\,\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta},$$

這裏用了 $\cos^2\theta = (1-\sin\theta)(1+\sin\theta)$。由曲線方程，$1+\sin\theta = 2d/r$ 及 $1-\sin\theta = 2-2d/r = 2(r-d)/r$，所以

$$\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta} = \frac{r-d}{d}, \qquad \text{得} \qquad \dot{r}^2 = \frac{r-d}{d}\,r^2\dot{\theta}^2.$$

在極坐標中，速率滿足 $u^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$，所以

$$u^2 = r^2\dot{\theta}^2\left(\frac{r-d}{d}+1\right) = \frac{r}{d}\,r^2\dot{\theta}^2, \qquad \text{因此} \qquad \dot{r}^2 = \frac{r-d}{r}\,u^2.$$

想一想 當 $r = d$ 時，$\dot{r}$ 是多少？

當 $r = d$ 時，珠子位於頂點，$\theta = \frac{\pi}{2}$，此處 r 取最小值，且 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta = 0$。所以該處 $\dot{r} = 0$（公式 $\dot{r}^2 = \frac{r-d}{r}u^2$ 也這樣說），懸掛的質點瞬間靜止。因此 $(*)$ 中的常數是 v^2：

$$u^2 + \frac{r-d}{r}\,u^2 = v^2 \quad\Longrightarrow\quad u^2\,\frac{2r-d}{r} = v^2 \quad\Longrightarrow\quad u = \left(\frac{r}{2r-d}\right)^{\frac{1}{2}} v,$$

由於 u 和 v 是速率，取正根。這就是所求的結果。

驗算

- 當 $r = d$ 時，公式給出 $u = v$，理應如此。
- 當 $r \to \infty$ 時，$u \to v/\sqrt{2}$。在很遠處，拋物線的切線幾乎正好沿着半徑方向，所以 $\dot{r} \approx u$，而動能 $\frac{1}{2}mv^2$ 由珠子與質點平均分享。
- 在環的水平上的平衡：點 $(2d, 0)$ 在曲線上，該處張力 mg（水平）與重力 mg（垂直）合成一個與水平成 45° 的力，垂直於拋物線在該處斜率為 -1 的切線。
- 數值上，取 $d = 1.3$ 及 $v = 2$，我們由頂點出發，沿拋物線對珠子與質點系統的運動方程進行數值積分。在 $r = 2.8905$ 處，珠子的速率是 1.606309，與 $\sqrt{r/(2r-d)}\,v$ 相差約 10^{-8}。我們亦在線上 1000 個隨機點驗證了靜止珠子所受的切向力為零。

常見錯誤

- 忘記懸掛質點的動能，結果對所有 r 都得出 $u = v$。勢能是常數，但動能是由兩者分享的。
- 把質點的速率當作 u 而不是 $|\dot{r}|$。只有珠子運動的徑向部分才會把繩拉過環。
- 由另一條線量度 θ，卻照搬 $r(1 + \sin\theta) = 2d$。任何正確的極坐標形式都可以，但要說明 θ 是由哪條線量度的。

STEP 之外

系統在勢能取駐值之處處於平衡，這個想法就是*虛功原理*（principle of virtual work），它引向拉格朗日力學（Lagrangian mechanics）。在拉格朗日力學中，動能以一個廣義坐標（generalised coordinate）（這裏是 θ）表示，運動方程由此直接得出，完全不必求張力。由於 V 在這條線上是常數，珠子和質點的運動就好像完全沒有受力一樣，而我們的關係式不過是動能 $\frac{1}{2}m r^2(2r - d)\dot{\theta}^2/d$ 守恆。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）以這種精神講解能量方法和受約束的運動。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。