詳細解答

STEP II 1987，第 11 題

力學 • 摩擦力與力矩

> **STEP II 1987，第 11 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/87-s2-q11

關鍵思路

支點的作用力是未知的，我們也不需要求它，所以我們對支點 O 取力矩（moment），因為該力對 O 沒有力矩。桿是處於三維空間中的，但圓環所在的平面給出兩個自然的方向：垂直於平面的方向（法向反作用力（normal reaction）沿此方向作用）和平面內的方向（摩擦力（friction）在此方向作用）。把重力也按同樣方式分解，一條力矩方程給出法向反作用力，另一條給出摩擦力。兩者之比就是 μ。

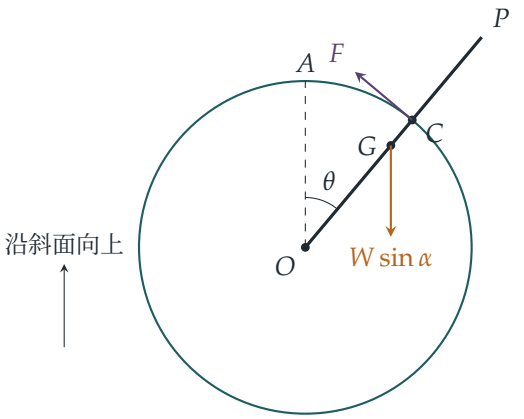
解答

模型。 桿 OP 是一條重量為 W 的均勻桿，其質心（centre of mass）G 位於中點，所以 $OG = \frac{1}{2}b$。桿以光滑支點（pivot）固定於圓環的圓心 O。桿橫跨圓環，擱在圓周上的一點 C，所以 $OC = a$。由於 O 和 C 都在圓環所在的平面上，桿也位於該平面內。設 A 為圓環的最高點，於是 OA 沿最大斜率線（line of greatest slope）直指向上，並設 $\angle AOC = \theta$。

作用力。 作用於桿上的力有：

- 作用於 G 的重力 W；
- 光滑支點 O 處的作用力，此力未知，但對 O 沒有力矩；
- C 處的接觸力。桿與圓環的金屬線在 C 相交。桿沿半徑方向，金屬線沿切線方向，兩者都在平面內，所以它們的公共法線垂直於平面。因此法向反作用力 R 垂直於圓環所在的平面。摩擦力 F 位於平面內。桿唯一可能的運動是繞 O 轉動，這會令 C 沿圓環的切線移動。所以摩擦力沿該切線作用，與桿垂直。

把重力分解為垂直於平面（指向平面內）的分量 $W\cos\alpha$，以及在平面內沿最大斜率線向下的分量 $W\sin\alpha$。下圖是垂直俯視該平面所見的情況，A 在最上方。R 在 C 處指出紙面。



對 O 取力矩。 由於支點光滑，其餘各力對經過 O 的每一條軸的總力矩都是零。其中兩條軸能給出有用的方程。

*在平面內、經過 O 並垂直於桿的軸。*只有垂直於平面的力對這條軸有力矩，即距離為 $\frac{1}{2}b$ 的 $W\cos\alpha$ 和距離為 a 的 R。平面內的力 F 和 $W\sin\alpha$ 要麼與這條軸相交，要麼與它平行，所以對它沒有力矩。因此

$$R\,a = W\cos\alpha\cdot\tfrac{1}{2}b, \qquad \text{所以} \qquad R = \frac{Wb\cos\alpha}{2a}.$$

*垂直於平面、經過 O 的軸。*現在只有平面內的力才起作用。桿與沿斜面向上的方向成 θ 角，所以 $W\sin\alpha$ 垂直於桿的分量是 $W\sin\alpha\sin\theta$，作用於距離 $\frac{1}{2}b$ 處。摩擦力本身已垂直於桿，作用於距離 a 處。因此

$$F\,a = W\sin\alpha\sin\theta\cdot\tfrac{1}{2}b, \qquad \text{所以} \qquad F = \frac{Wb\sin\alpha\sin\theta}{2a}.$$

重力在平面內的分量傾向令桿擺離 A，向圓環底部擺下去，而摩擦力則阻止這個運動。

想一想 摩擦力會不會也有沿桿方向的分量？

沿桿方向的力經過 O，所以對 O 沒有力矩。它既不能促進也不能阻礙轉動，而支點可以提供沿桿方向的任何力。唯一可能的運動是繞 O 轉動，所以對極限平衡（limiting equilibrium）而言，有關的摩擦力是沿切線方向的分量，也就是 F。我們把摩擦力視為完全沿切線作用。

極限平衡。 在極限平衡時 $F = \mu R$：

$$\frac{Wb\sin\alpha\sin\theta}{2a} = \mu\,\frac{Wb\cos\alpha}{2a} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\mu = \tan\alpha\,\sin\theta}$$

（我們取 $0 \le \theta \le \pi$）。只要 $\tan\alpha\sin\theta \le \mu$，桿便能在角 θ 處保持平衡。留意 a、b 和 W 全都消去了。

驗算

- 若 $\theta = 0$ 或 $\theta = \pi$，桿沿最大斜率線放置。此時重力在平面內的分量正好沿桿方向拉，不需要摩擦力：$\mu = 0$。當 $\alpha = 0$ 時亦然，因為圓環水平時重力在平面內沒有分量。
- 當 $\theta = \frac{1}{2}\pi$，即桿處於水平時，所需的摩擦力最大。此時 $\mu = \tan\alpha$，與傾角為 α 的斜面上的木塊情況吻合。
- 我們做了一次數值驗算：對 α, θ, a, b, W 隨機取 2000 組值，把各力寫成三維向量（vector），解對 O 的向量力矩方程求 R 和 F，發現 F/R 與 $\tan\alpha\sin\theta$ 的差距在 4×10^{-15} 以內。例如 $\alpha = 30°$、$\theta = 60°$ 給出 $\mu = \frac{1}{2}$。

常見錯誤

- 以為 C 處的法向反作用力沿半徑方向，就像桿靠在鉛垂平面中的圓環內側那樣。這裏桿是橫跨在金屬線上的，所以法線垂直於圓環所在的平面。
- 用分解力的方法而不取力矩。這樣會引入支點作用力的三個未知分量，而題目並不需要它們。

STEP 之外

這裏我們對經過 O 的兩條互相垂直的軸取力矩。這是單一向量方程 $\sum \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ 的捷徑，該方程表示對 O 的總轉矩（torque）為零。把轉矩視為向量，以及剛體（rigid body）在三維空間中的平衡條件，都是大學一年級力學的標準內容，並會進一步引向剛體繞固定點的轉動。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）正是以這種方式，把轉矩和角動量（angular momentum）作為向量來發展。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。