詳細解答

STEP II 1987，第 10 題

純數學 • 群公理

> **STEP II 1987，第 10 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/87-s2-q10

關鍵思路

一切都發生在下標(subscripts)之中，所以把每個運算轉化為下標 $1, 2, \ldots, N$ 上的普通算術：第一個運算是「取最大值」，第二個運算是「取兩者之差的絕對值，再加一」。然後逐一檢驗四條公理(axioms)：封閉性(closure)、結合律(associativity)、單位元(identity)、逆元（inverses)。要說明某條公理不成立，只需一個具體的反例（counterexample)；要說明某條公理成立，則需要一般性的論證。

解答

全文中，以 $j \circ k$ 表示 $a_j \circ a_k$ 的下標，$*$ 亦同理。兩個元素相等，當且僅當它們的下標相等。

運算 $\circ$

這裏 $a_j \circ a_k = a_{\max(j,k)}$。

封閉性成立。若 $1 \le j, k \le N$，則 $\max(j,k)$ 是 j 和 k 其中之一，所以它屬於 $\{1, \ldots, N\}$，因此 $a_j \circ a_k \in S$。

結合律成立。對任意 j, k, l，

$$(a_j \circ a_k) \circ a_l = a_{\max(\max(j,k),l)} = a_{\max(j,k,l)} = a_{\max(j,\max(k,l))} = a_j \circ (a_k \circ a_l),$$

因為兩種加括號的方式都得出三個下標中最大的一個。

單位元存在：它就是 a_1。每個下標都至少是 1，所以 $\max(1,k) = \max(k,1) = k$，因此對每個 k 都有 $a_1 \circ a_k = a_k \circ a_1 = a_k$。

逆元不成立。a_j 的逆元應是某個 a_k，使得 $a_j \circ a_k = a_1$，即 $\max(j,k) = 1$。但 $\max(j,k) \geq j$，所以當 $j \geq 2$ 時這是不可能的。例如，對每個 k，$a_2 \circ a_k$ 都是 a_2 或排在其後的元素，永遠不會是 a_1。只有 a_1 有逆元（就是它自己）。

所以 S 在 $\circ$ 下滿足封閉性、結合律和單位元，但不滿足逆元公理，因此不是羣（group）。

> **想一想** 會不會有其他元素也是單位元，以致逆元的論證需要重做？

不會：單位元是唯一的。若 e 和 e' 都是單位元，則 $e = e \circ e' = e'$。所以「$a_j \circ a_k$ 等於單位元」中的單位元只可能是 a_1，上面的論證是完整的。

運算 $*$

這裏 $a_j * a_k = a_{|j-k|+1}$。當 $N = 4$ 時，下標的運算表為

$*$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	1	2	3
3	3	2	1	2
4	4	3	2	1

表中可見的規律對每個 N 都成立。

封閉性成立。若 $1 \leq j,k \leq N$，則 $0 \leq |j-k| \leq N-1$，所以 $1 \leq |j-k|+1 \leq N$，因此 $a_j * a_k \in S$。

單位元存在：它就是 a_1。由於 $k \geq 1$，$|1-k| = k-1$，所以 $a_1 * a_k = a_k$；同樣地 $a_k * a_1 = a_k$（因為 $|j-k| = |k-j|$，這個運算是可交換的（commutative））。

逆元成立。$a_j * a_j = a_{0+1} = a_1$，即單位元，所以每個元素都是自己的逆元。（這就是表中對角線上的一列 1。）

結合律不成立。取 a_2, a_2, a_3（這需要 $N \geq 3$）：

$$(a_2 * a_2) * a_3 = a_1 * a_3 = a_3,$$
$$a_2 * (a_2 * a_3) = a_2 * a_{|2-3|+1} = a_2 * a_2 = a_1.$$

兩者不同，所以 $*$ 不滿足結合律。

所以 S 在 $*$ 下滿足封閉性、單位元和逆元，但不滿足結合律，因此同樣不是羣。

> **想一想** 哪裏用到了 $N > 2$？

只在結合律的反例中用到，因為它用了 a_3。當 $N = 2$ 時，運算表就是 2 階羣的運算表（a_1 為單位元，$a_2 * a_2 = a_1$），而 $*$ 是滿足結合律的；至於 $\circ$，逆元的論證只需要 a_2，所

以 $\circ$ 在 $N = 2$ 時同樣不成羣。

驗算

用窮舉法（brute force）檢查小的情況：對 2 至 9 的每個 N，我們列出所有三元組來檢驗結合律，並直接搜尋單位元和逆元。對於 $\circ$：封閉、滿足結合律、單位元為 a_1，且只有 a_1 可逆。對於 $*$：封閉、單位元為 a_1、每個元素都是自己的逆元，而結合律對每個 $N \geq 3$ 都不成立（包括在 (a_2, a_2, a_3) 處），但在 $N = 2$ 時成立。你可以用一個 3×3 的運算表，一分鐘內親手完成 $N = 3$ 的情況。

常見錯誤

- 以為「取最大值」不像乘法，便斷言 $\circ$ 沒有單位元。應檢查最小的元素：a_1 正是單位元。
- 嘗試一般地證明 $*$ 滿足結合律，或者只檢驗含有 a_1 的三元組（這些三元組必然滿足結合律，因為 a_1 是單位元）。真正需要的只是一個具體的反例。
- 忘記檢驗封閉性。封閉性很容易被想當然，但這裏它需要用到上界 $|j - k| \leq N - 1$。

STEP 之外

一個帶有滿足結合律的運算和單位元的集合，例如 S 在 $\circ$ 下，稱為麼半羣（monoid）；全序集（totally ordered set）上的「取最大值」是一個標準例子，它同時也是一個半格（semilattice）。一個滿足封閉性、單位元和逆元但不滿足結合律的集合，例如 S 在 $*$ 下，說明結合律是一條真正獨立的公理：它不能從其餘三條推導出來。若想了解羣的各條公理如何互相配合，可參閱 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《環、域與羣》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。