詳細解答

STEP II 1987，第 1 題

純數學 • 代數恆等式

> **STEP II 1987，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/87-s2-q1

關鍵思路

不要急於代入消去其中一個字母，而應該把右邊展開（expand）。平方項 a^2、b^2、c^2 在兩邊都出現，可以互相抵消，剩下的是 x 乘以一個線性表達式（linear expression），而這個表達式恰好是已知條件的某個倍數。一旦看清數字 7 和 11 從何而來，一般結果便水到渠成。

解答

先一次過做一般情況的展開會比較方便。對任意數 p、q、r，

$$(px-a)^2+(qx-b)^2+(rx-c)^2=(p^2+q^2+r^2)x^2-2x(pa+qb+rc)+a^2+b^2+c^2,$$

所以

$$(px-a)^2+(qx-b)^2+(rx-c)^2-(a^2+b^2+c^2)=x[(p^2+q^2+r^2)x-2(pa+qb+rc)]. \qquad (*)$$

第 (i) 部分

這裡 $(p,q,r)=(1,2,3)$，所以 $p^2+q^2+r^2=14$，而 $(*)$ 變成

$$(x-a)^2+(2x-b)^2+(3x-c)^2-(a^2+b^2+c^2)=x[14x-2(a+2b+3c)].$$

若 $a+2b+3c=7x$，方括號內便是 $14x-14x=0$。因此兩邊相等，得證。

第 (ii) 部分

現在 $(p,q,r)=(2,3,3)$，所以 $p^2+q^2+r^2=4+9+9=22$，而

$$(2x-a)^2+(3x-b)^2+(3x-c)^2-(a^2+b^2+c^2)=x[22x-2(2a+3b+3c)].$$

若 $2a+3b+3c=11x$，方括號內便是 $22x-22x=0$，這就證明了 (ii)。

> **想一想** 為甚麼 (i) 中是 7，(ii) 中是 11？

它們都是 $p^2+q^2+r^2$ 的一半：$7=\frac{1}{2}(1+4+9)$，$11=\frac{1}{2}(4+9+9)$。這就告訴我們一般的命題應該是甚麼。

一般結果

恆等式（identity）$(*)$ 直接證明了以下結果。

對任意實數 p,q,r,a,b,c,x，若

$$2(pa+qb+rc)=(p^2+q^2+r^2)\,x,$$

則

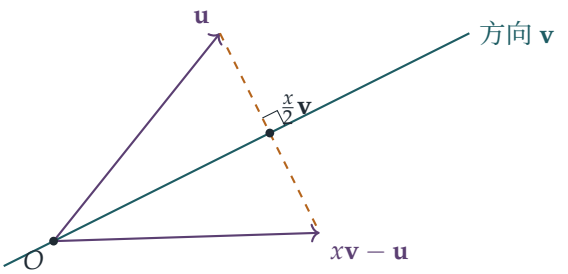
$$a^2+b^2+c^2=(px-a)^2+(qx-b)^2+(rx-c)^2.$$

第 (i) 部分是 $(p,q,r)=(1,2,3)$ 的情況，第 (ii) 部分是 $(p,q,r)=(2,3,3)$ 的情況。

同樣的展開對任意多個變量都適用。若 $2\sum_{i=1}^n p_ia_i=(\sum_{i=1}^n p_i^2)x$，則 $\sum a_i^2=\sum(p_ix-a_i)^2$。由 $(*)$ 我們還得到一個逆命題（converse）：若 $x\neq 0$ 且恆等式成立，則條件必定成立。

幾何上的意義

記 $\mathbf{u}=(a,b,c)$ 及 $\mathbf{v}=(p,q,r)$。條件可寫成 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\frac{x}{2}|\mathbf{v}|^2$，意思是 $\frac{x}{2}\mathbf{v}$ 是從 $\mathbf{u}$ 到經過 O、方向為 $\mathbf{v}$ 的直線的垂足（foot of the perpendicular）。於是向量 $x\mathbf{v}-\mathbf{u}=2\cdot\frac{x}{2}\mathbf{v}-\mathbf{u}$ 就是 $\mathbf{u}$ 關於該直線的反射（reflection）。反射保持長度不變，所以 $|x\mathbf{v}-\mathbf{u}|=|\mathbf{u}|$，而這正是那個恆等式。



驗算

以 $x = 1$、$a = b = 0$、$c = \frac{7}{3}$ 試驗 (i)。左邊是 $\frac{49}{9}$，右邊是 $1 + 4 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 5 + \frac{4}{9} = \frac{49}{9}$。我們還用精確的有理數運算測試了兩部分及一般結果，每項各測試 2000 個隨機例子（一般情況最多六個變量），並確認了當 $x \neq 0$ 而條件不成立時，恆等式必定不成立。

常見錯誤

- 一開始就代入 $c = \frac{1}{3}(7x - a - 2b)$。這樣做行得通，但代數運算很繁瑣，而且掩蓋了問題的結構。
- 把一般結果寫成「$pa + qb + rc = kx$」，卻沒有交代 k 與 p, q, r 的關係。恆等式要求 $k = \frac{1}{2}(p^2 + q^2 + r^2)$。

STEP 之外

這個幾何圖像正是線性代數（linear algebra）的起點。映射 $\mathbf{u} \mapsto 2\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v} - \mathbf{u}$ 是一個反射，屬於正交線性映射（orthogonal linear map），而正交映射恰好就是保持長度不變的線性映射。像這樣的投影（projection）和反射，是最小二乘法（least squares）以及數值計算中所用的 Householder 變換（Householder transformations）的基礎。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）以同樣的幾何風格發展這些概念。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。