詳細解答

STEP I 1987，第 9 題

純數學 • 重心坐標

> **STEP I 1987，第 9 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/87-s1-q9

關鍵思路

從 A 向 B 移動，就是加上向量（vector）$\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ 的某個分數倍。做一次，得到的是線段（segment）上的點；做兩次，先沿 AB 走，再從該點向 C 走，就能掃遍整個三角形。至於作圖部分，竅門是把每種情況改寫成我們已經理解的形式：要麼是三角形情況的翻轉，要麼是點 A 加上兩條邊向量的倍數。

解答

AB 上的點

線段 AB 上的點 P，可以從 A 出發，沿 $\overrightarrow{AB}$ 走全程的 t 倍到達，其中 $0 \le t \le 1$（$t = 0$ 給出 A，$t = 1$ 給出 B）。因此

$$\mathbf{p} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = (1 - t)\mathbf{a} + t\,\mathbf{b}.$$

設 $\rho = 1 - t$ 及 $\sigma = t$。由於 $0 \le t \le 1$，所以 $\rho \ge 0$ 及 $\sigma \ge 0$，而且 $\rho + \sigma = 1$。這正是所求的形式。反過來，取 $t = \sigma$，每一對這樣的 ρ, σ 都給出線段上的一點。

PC 上的點，以及三角形內的點

用完全相同的方法，線段 PC 上的點 Q 的位置向量（position vector）為

$$\mathbf{q} = (1 - s)\mathbf{p} + s\,\mathbf{c}, \qquad 0 \le s \le 1.$$

代入 $\mathbf{p} = \rho\mathbf{a} + \sigma\mathbf{b}$，得

$$\mathbf{q} = (1 - s)\rho\,\mathbf{a} + (1 - s)\sigma\,\mathbf{b} + s\,\mathbf{c}.$$

設 $\lambda = (1-s)\rho$、$\mu = (1-s)\sigma$ 及 $\nu = s$。每一個都是非負（non-negative）數的乘積，所以 $\lambda, \mu, \nu \geq 0$。此外

$$\lambda + \mu + \nu = (1-s)(\rho+\sigma) + s = (1-s) + s = 1.$$

想一想 為甚麼三角形內的每一點都位於某條線段 PC 上？

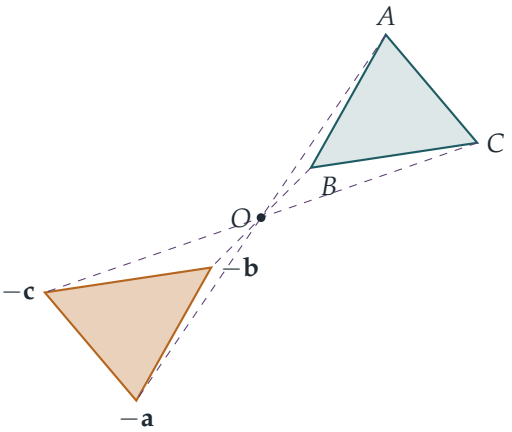
取三角形內（或其邊界上）的一點 X。若 $X = C$，則無需證明：取 $s = 1$ 即可。否則，從 C 經過 X 畫一條直線，並延伸越過 X。由於 X 位於角 ACB 之內，這條直線保持在 CA 與 CB 之間，因此必定與對邊 AB 相交，設交點為 P。由於 X 在三角形內，它位於 C 與 P 之間，所以 X 在線段 PC 上。根據上面的推導，$\mathbf{x} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \nu\mathbf{c}$，其中 $\lambda, \mu, \nu \geq 0$ 且 $\lambda + \mu + \nu = 1$，命題得證。

第 (i) 部分

設 $\lambda = -\lambda'$、$\mu = -\mu'$ 及 $\nu = -\nu'$。條件變為 $\lambda', \mu', \nu' \geq 0$ 及 $\lambda' + \mu' + \nu' = 1$，而該點為

$$\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \nu\mathbf{c} = -\left(\lambda'\mathbf{a} + \mu'\mathbf{b} + \nu'\mathbf{c}\right).$$

根據剛才所證，括號內的式子遍歷三角形 ABC 的每一點（再加上第一部分的逆命題，每一個這樣的組合都在三角形內）。因此所求區域是所有點 $-\mathbf{x}$ 的集合，其中 X 在三角形 ABC 內。換言之，它是以 $-\mathbf{a}$、$-\mathbf{b}$、$-\mathbf{c}$ 為頂點的三角形連同其內部：即三角形 ABC 繞原點 O 旋轉半周（half-turn）後的像。



琥珀色陰影三角形就是 (i) 的答案。它的每個頂點都是 ABC 的一個頂點經 O 的點對稱像，如虛線所示。

第 (ii) 部分

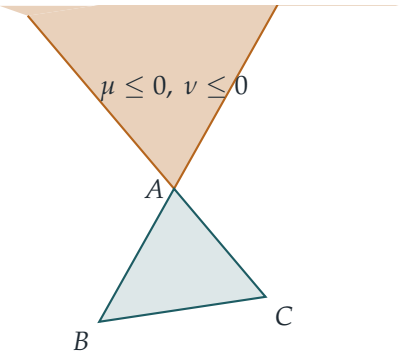
現在 $\lambda = 1 - \mu - \nu$，所以

$$\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \nu\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mu(\mathbf{b} - \mathbf{a}) + \nu(\mathbf{c} - \mathbf{a}).$$

我們從 A 出發，加上 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 的倍數。設 $\mu = -m$ 及 $\nu = -n$，其中 $m, n \geq 0$，則該點為

$$\mathbf{a} + m(\mathbf{a} - \mathbf{b}) + n(\mathbf{a} - \mathbf{c}), \qquad m \geq 0,\ n \geq 0.$$

向量 $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ 指向 BA 越過 A 的延長方向，而 $\mathbf{a} - \mathbf{c}$ 指向 CA 越過 A 的延長方向。兩個不平行向量的非負組合恰好填滿它們之間的角（由於 $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ 與 $\mathbf{c} - \mathbf{a}$ 不平行，平面上每一點都可唯一地寫成 $\mathbf{a} + m(\mathbf{a} - \mathbf{b}) + n(\mathbf{a} - \mathbf{c})$，即 m, n 恰有一對）。因此所求區域是以 A 為頂點、以 BA 和 CA 越過 A 的延長線為界的無限楔形區域（wedge），邊界射線包括在內。它是角 BAC 的對頂角（vertically opposite angle）。注意題目沒有限制 λ，但在這裏它自動至少為 1。



琥珀色楔形區域（無限延伸）就是 (ii) 的答案。它的邊是邊 BA 和 CA 經 A 延長所得。圖中青色三角形 ABC 僅供參照。

驗算

- 頂點：在 (ii) 中，$(\lambda, \mu, \nu) = (1, 0, 0)$ 給出 A 本身，即楔形的尖端；$(2, -1, 0)$ 給出 $2\mathbf{a} - \mathbf{b}$，即 B 關於 A 的對稱點，它位於其中一條邊上。在 (i) 中，$(-1, 0, 0)$ 給出 $-\mathbf{a}$，即對稱後三角形的一個頂點。
- 重心：在 (i) 中，$\lambda = \mu = \nu = -\frac{1}{3}$ 給出 ABC 重心（centroid）的負值，這正是對稱後三角形的重心，與預期相符。
- 數值方面，我們用電腦隨機取了 20,000 個三角形，以及滿足各組條件的隨機係數。結果確認：(i) 的每一點都位於三角形 $(-\mathbf{a}, -\mathbf{b}, -\mathbf{c})$ 內；(ii) 的每一點從 A 出發沿

$\mathbf{a}-\mathbf{b}$ 和 $\mathbf{a}-\mathbf{c}$ 的坐標都是非負的；而 ABC 的每一點都可分解為某條線段 PC 上的點。

常見錯誤

- 在 (i) 中，在 ABC 附近畫出區域。係數之和是 -1 而不是 1，所以該區域是 ABC 繞原點旋轉半周的結果，並且取決於 O 的位置。
- 在 (ii) 中，只畫出一個三角形。μ 和 ν 沒有下界，所以該區域是無界的。
- 把與 BAC 相鄰的角塗上陰影（例如 AB 與 CA 延長線之間的角）。那需要 μ,ν 其中之一為正數。

STEP 之外

滿足 $\lambda+\mu+\nu=1$ 的數組 (λ,μ,ν) 稱為一點相對於該三角形的重心坐標（barycentric coordinates）。當總和為 1 時，該點與原點的位置無關：把每個位置向量都平移 $\mathbf{d}$，$\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}+\nu\mathbf{c}$ 也會平移 $(\lambda+\mu+\nu)\mathbf{d}=\mathbf{d}$。這就是為甚麼 (ii) 的答案是一個真正的幾何區域，而 (i) 則取決於 O。三角形本身是 A、B、C 的凸包（convex hull），這個概念是線性規劃（linear programming）和凸優化（convex optimisation）的核心。重心坐標的正負號把平面分成七個區域，(ii) 是其中之一。若想從大學一年級的角度認識這些仿射（affine）概念，可參閱 Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。