詳細解答

STEP I 1987，第 8 題

純數學 • 代換積分法

STEP I 1987，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/87-s1-q8

關鍵思路

代換（substitution）要成為合法的變數轉換，前提是當舊變數走過某個區間時，新變數也要平滑地、單向地走過一個區間。這裏 $t = 1/x$ 在 $x = 0$ 處趨於無窮，而 $x = 0$ 正好位於 $[-1, 1]$ 的中間，所以「新的上下限」-1 和 1 描述的是一組完全不同的 t 值。只要看一看兩個被積函數（integrand）的正負號，就能確認出了問題。

解答

代換為何失效

形式上，設 $x = 1/t$，則 $\mathrm{d}x = -\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$，而且

$$\frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{t^2}\right)^2} = \frac{t^4}{(1+t^2)^2}, \qquad \text{所以} \qquad \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} = \frac{-t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t,$$

而 $x = \pm 1$ 對應 $t = \pm 1$。這就是「證明」兩個積分相等的做法。但這不可能是對的：第一個被積函數處處為正，所以第一個積分是正數；而第二個被積函數處處 ≤ 0，所以第二個積分是負數。

想一想 當 x 由 -1 走到 1 時，$t = 1/x$ 實際上取哪些值？

當 x 由 -1 增加到 0^- 時，t 由 -1 減少到 $-\infty$；在 $x = 0$ 處根本沒有對應的 t；而當 x 由 0^+ 走到 1 時，t 由 $+\infty$ 下降到 1。所以 x 的區間 $[-1, 1]$ 對應的是 $t \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$，即 $[-1, 1]$ 的外面，而不是 $[-1, 1]$ 本身。代換法則要求 $x = \phi(t)$，其中 ϕ 在新上下限之間的整個 t 區間上可導，但 $\phi(t) = 1/t$ 在 $t = 0 \in [-1, 1]$ 處連定義都沒有。$(-1, 1)$ 內的 t 值對應 $|x| > 1$，那些值根本在原來的範圍以外。

正確地使用這個代換，即在兩半上分別進行，例如可得

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} = \int_\infty^1 \frac{-t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \int_1^\infty \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t,$$

這是一個正確的命題（下面會加以驗證），但它對於 t 在 $[-1,1]$ 上的積分毫無說明。

第一個積分

設 $x = \tan\theta$，則 $\mathrm{d}x = \sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$ 及 $1+x^2 = \sec^2\theta$；這個代換沒有問題，因為 tan 在 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ 上平滑而且遞增。於是

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} &= \int \frac{\sec^2\theta}{\sec^4\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \int \tfrac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \tfrac{1}{2}\theta + \tfrac{1}{4}\sin 2\theta = \tfrac{1}{2}\theta + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\tan\theta}{1+\tan^2\theta} = \tfrac{1}{2}\arctan x + \frac{x}{2(1+x^2)},\end{aligned}$$

這裏用了 $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\tan\theta\cos^2\theta$。因此

$$\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} = \left[\tfrac{1}{2}\arctan x + \frac{x}{2(1+x^2)}\right]_{-1}^1 = 2\left(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\right) = \boxed{\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}}.$$

第二個積分

把分子寫成 $-t^2 = 1-(1+t^2)$：

$$\frac{-t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{(1+t^2)^2} - \frac{1}{1+t^2}.$$

由上一部分，第一項在 $[-1,1]$ 上的積分是 $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$，而 $\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = [\arctan t]_{-1}^1 = \frac{\pi}{2}$。所以

$$\int_{-1}^1 \frac{-t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}-\frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}},$$

這是負數（≈ -0.285），正如被積函數的正負號所要求的；而第一個積分約為 1.285。

驗算

- 用辛普森法則（Simpson's rule）計算兩個積分，得 1.2853981… 和 −0.2853981…，與 $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$ 及 $\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}$ 吻合。
- 兩個答案之和是 1。這是有原因的：$\frac{1}{(1+x^2)^2} - \frac{x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$，它正是 $\frac{x}{1+x^2}$ 的導數（derivative），而 $\left[\frac{x}{1+x^2}\right]_{-1}^1 = 1$。
- 正確的半區間命題也驗證無誤：$\int_1^\infty \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{8}+\frac{1}{4} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}$。

常見錯誤

- 只說「$1/t$ 在 $t = 0$ 處無定義」，卻沒有解釋 x 的範圍 $[-1, 1]$ 對應的是 $|t| \geq 1$：真正的重點是兩個積分涵蓋的是不同的取值集合。
- 把 $\mathrm{d}x = -\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ 的正負號弄錯，以致掩蓋了那個露出破綻的正負號矛盾。
- 積分 $\cos^2\theta$ 時漏掉 $\frac{1}{4}\sin 2\theta$ 一項。

STEP 之外

代換法則 $\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x$ 在大學第一門數學分析（analysis）課程中，會由鏈式法則（chain rule）和微積分基本定理（Fundamental Theorem of Calculus）證明，而證明過程清楚顯示所需的條件：ϕ 必須在整個 $[a, b]$ 上連續可微（continuously differentiable）。這裏它在一點上失效，而單單這一點就足以令結果崩潰。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）細緻地建立了黎曼積分（Riemann integral）及這些定理。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。