詳細解答

STEP I 1987，第 7 題

純數學 • 三角級數

> **STEP I 1987，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/87-s1-q7

關鍵思路

兩個級數（series）都是正弦之和，而且角度以相等的步長遞增。把 $\sin((2k+1)\theta)$ 這類項乘以 $2\sin\theta$ 或 $2\cos\theta$，再利用積化和差公式（product-to-sum formula），便可把它化為相鄰兩項的*差*或*和*，於是整個級數便會裂項相消（telescopes）。唯一要決定的是用哪個因子：$2\sin\theta$ 適用於普通的和，$2\cos\theta$ 則適用於交錯（alternating）的和。

解答

準備工作

設 $\theta = \dfrac{2\pi}{23}$。各角為 $2\pi/23,\ 6\pi/23,\ 10\pi/23, \ldots, 42\pi/23$，每次增加 $4\pi/23 = 2\theta$，所以它們是

$$(2k+1)\theta \qquad \text{其中} k = 0, 1, \ldots, 10,$$

因為 $21\theta = 42\pi/23$。這樣共有 11 項，而在交錯級數中，第 k 項的符號是 $(-1)^k$（最後一項 $k = 10$ 的符號是 $+$，正合題意）。因此我們要求

$$S_1 = \sum_{k=0}^{10} \sin((2k+1)\theta), \qquad S_2 = \sum_{k=0}^{10} (-1)^k \sin((2k+1)\theta).$$

我們會用到 $22\theta = \dfrac{44\pi}{23} = 2\pi - \dfrac{2\pi}{23}$，因此

$$\cos 22\theta = \cos\theta, \qquad \sin 22\theta = -\sin\theta.$$

第一個級數

由積化和差公式 $2\sin A\sin B=\cos(A-B)-\cos(A+B)$，

$$2\sin\theta\,\sin((2k+1)\theta)=\cos(2k\theta)-\cos((2k+2)\theta).$$

對 $k=0,\ldots,10$ 求和，每個 $1\le k\le 10$ 的 $\cos(2k\theta)$ 都以正負號各出現一次而互相抵消，剩下

$$2\sin\theta\,S_1=\cos 0-\cos 22\theta=1-\cos\theta.$$

由於 $0<\theta<\pi$，$\sin\theta\neq 0$，所以可以相除：

$$S_1=\frac{1-\cos\theta}{2\sin\theta}=\frac{2\sin^2(\theta/2)}{4\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)}=\tfrac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2},$$

這裏用了 $1-\cos\theta=2\sin^2(\theta/2)$ 和 $\sin\theta=2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)$，並約去 $\sin(\theta/2)\neq 0$。由於 $\theta/2=\pi/23$，

$$\boxed{\sin\tfrac{2\pi}{23}+\sin\tfrac{6\pi}{23}+\cdots+\sin\tfrac{42\pi}{23}=\tfrac{1}{2}\tan\tfrac{\pi}{23}.}$$

想一想 為甚麼處理交錯級數時要乘以 $2\cos\theta$，而不是再乘以 $2\sin\theta$？

若乘以 $2\sin\theta$，得到的是差 $\cos(2k\theta)-\cos((2k+2)\theta)$，而交錯的符號會令相鄰的項相加而非抵消。若乘以 $2\cos\theta$，得到的是和 $\sin((2k+2)\theta)+\sin(2k\theta)$，這時正是交錯的符號帶來抵消。

第二個級數

由 $2\cos A\sin B=\sin(B+A)+\sin(B-A)$，

$$2\cos\theta\,\sin((2k+1)\theta)=\sin((2k+2)\theta)+\sin(2k\theta).$$

乘以 $(-1)^k$ 再求和。對於 $1\le k\le 10$，$\sin(2k\theta)$ 一次來自第 $k-1$ 項，符號為 $(-1)^{k-1}$，另一次來自第 k 項，符號為 $(-1)^k$，所以互相抵消。剩下的是來自 $k=0$ 的 $\sin 0$ 和來自 $k=10$ 的 $(-1)^{10}\sin 22\theta$：

$$2\cos\theta\,S_2=\sin 22\theta=-\sin\theta.$$

由於 $0<\theta<\pi/2$，$\cos\theta\neq 0$，所以

$$S_2=-\frac{\sin\theta}{2\cos\theta}=-\tfrac{1}{2}\tan\theta,$$

即

$$\boxed{\sin\tfrac{2\pi}{23}-\sin\tfrac{6\pi}{23}+\cdots-\sin\tfrac{38\pi}{23}+\sin\tfrac{42\pi}{23}=-\tfrac{1}{2}\tan\tfrac{2\pi}{23}.}$$

如果你喜歡看起來是正的形式，由於 $\tan(\pi-x)=-\tan x$，這也等於 $\frac{1}{2}\tan\frac{21\pi}{23}$。

驗算

- 以數值計算，$\frac{1}{2}\tan(\pi/23) \approx 0.068723$，而 $-\frac{1}{2}\tan(2\pi/23) \approx -0.140093$；直接把十一項相加，得到的值在 15 位有效數字（significant figures）內完全相同。
- 第二個答案是負數，這是合理的：部分和（partial sums）在約 ± 0.5 之間擺動，而最後加上的一項 $\sin(42\pi/23) \approx -0.27$ 本身就是負數。
- 同樣的方法可得出一般公式 $\sum_{k=0}^{n-1}\sin((2k+1)\theta) = \dfrac{\sin^2 n\theta}{\sin\theta}$ 和 $\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\sin((2k+1)\theta) = (-1)^{n-1}\dfrac{\sin 2n\theta}{2\cos\theta}$；試取 $n=1$，兩者都化為 $\sin\theta$。

常見錯誤

- 數錯項數：角度每次增加 $4\pi/23$，而不是 $2\pi/23$，所以共有 11 項，而不是 21 項。
- 以為兩個答案都是正數。大於 π 的角的正弦是負的，而負號正是來自 $\sin(44\pi/23) = -\sin(2\pi/23)$。

STEP 之外

這些和是幾何級數（geometric series）的虛部（imaginary part）：$S_1 = \operatorname{Im}\sum \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2k+1)\theta}$，而 S_2 也一樣，只是公比為 $-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}$，這為兩個答案提供了第二條途徑。這類和，例如狄利克雷核（Dirichlet kernel），是傅里葉分析（Fourier analysis）的起點；在傅里葉分析中，函數由正弦和餘弦組合而成。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直觀複分析》）借助旋轉向量的圖像，說明這類和為何有這樣的表現。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。