詳細解答

STEP I 1987，第 6 題

純數學 • 面積與反函數

> **STEP I 1987，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/87-s1-q6

關鍵思路

$\mathrm{F}(s)$ 是曲線下方、介乎曲線與 x 軸之間的面積；$\mathrm{G}(t)$ 則是曲線左方、介乎曲線與 y 軸之間的面積。把這兩個區域畫在同一幅圖上，它們合起來覆蓋以 $(0,0)$ 和 (s,t) 為頂點的長方形，而且除非頂點 (s,t) 剛好落在曲線上，否則還會有多出來的部分。在第二部分，我們選取 s 使這種情況出現，於是較難的積分 $\int \sin^{-1} y \,\mathrm{d}y$ 便可以從容易的積分 $\int \sin x \,\mathrm{d}x$ 直接得出。

解答

不等式 $(*)$

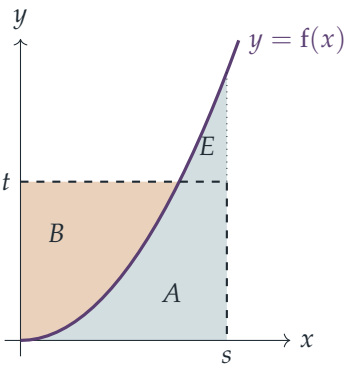
首先看看 f 的一個性質。它是連續（continuous）的，而且每個值最多只取一次，所以它是嚴格單調（strictly monotonic）的（根據介值定理（intermediate value theorem），一個先上升後下降的連續函數必定會把某個值取兩次）。由於 $\mathrm{f}(0) = 0$ 且 $\mathrm{f}(x) \geq 0$，它必定是嚴格遞增（strictly increasing）的。因此 g 亦是遞增的，並且對於 $0 \leq x \leq a$、$0 \leq y \leq \mathrm{f}(a)$，

$$y \leq \mathrm{f}(x) \iff \mathrm{g}(y) \leq x.$$

定義兩個區域：

$$A = \{(x,y) : 0 \leq x \leq s,\ 0 \leq y \leq \mathrm{f}(x)\}, \qquad \text{面積}\mathrm{F}(s),$$
$$B = \{(x,y) : 0 \leq y \leq t,\ 0 \leq x \leq \mathrm{g}(y)\}, \qquad \text{面積}\mathrm{G}(t),$$

並設 R 為長方形 $0 \leq x \leq s$、$0 \leq y \leq t$，其面積為 st。B 的面積是 $\mathrm{G}(t)$，因為我們是把長度為 $\mathrm{g}(y)$ 的水平窄條積分起來（「對 y 求面積」）。



R 中每一點都位於 A 或 B 之內：若 $(x,y)\in R$，則要麼 $y\le \mathrm{f}(x)$，該點在 A 內；要麼 $y>\mathrm{f}(x)$，即 $x<\mathrm{g}(y)$，該點在 B 內。兩者的重疊部分 $A\cap B$ 只是曲線本身的一段弧，面積為零。因此

$$\mathrm{F}(s)+\mathrm{G}(t)=\text{面積}(A)+\text{面積}(B)\ge\text{面積}(A\cup B)\ge\text{面積}(R)=st,$$

這就是 $(*)$。

想一想 究竟多算了哪些不在長方形內的部分？

多出來的是 $A\cup B$ 中伸出 R 之外的部分 E。若 $t<\mathrm{f}(s)$（如圖所示），B 留在 R 之內，但 A 在區域 $\mathrm{g}(t)<x\le s、t<y\le\mathrm{f}(x)$ 中伸出了 $y=t$ 之上。由於對每個 $x>\mathrm{g}(t)$ 都有 $\mathrm{f}(x)>t$，而且 f 連續，這個區域的面積為正，所以不等式嚴格成立。若 $t>\mathrm{f}(s)$，情況相同，只是角色互換：B 伸出了 $x=s$ 的右方。若 $t=\mathrm{f}(s)$，頂點 (s,t) 位於曲線上，$A\cup B$ 恰好就是 R，沒有多出來的部分。

所以 $(*)$ **中等號成立當且僅當** $t=\mathrm{f}(s)$，即 (s,t) 位於曲線上的時候。

$\sin^{-1}y$ 的積分

在 $[0,\frac{1}{2}\pi]$ 上取 $\mathrm{f}(x)=\sin x$。它連續、遞增、通過原點，並且留在第一象限，所以上面所有結果都適用，其中 $a=\frac{1}{2}\pi$、$\mathrm{f}(a)=1$ 及 $\mathrm{g}(y)=\sin^{-1}y$。

給定 $t\in[0,1]$，選取 $s=\sin^{-1}t$，它位於 $[0,\frac{1}{2}\pi]$ 之內。於是 $t=\sin s=\mathrm{f}(s)$，所以 $(*)$ 中等號成立：

$$\int_0^t \sin^{-1}y\,\mathrm{d}y=\mathrm{G}(t)=st-\mathrm{F}(s).$$

接着計算容易的積分：

$$\mathrm{F}(s)=\int_0^s \sin x\,\mathrm{d}x=1-\cos s.$$

代入 $s=\sin^{-1}t$，

$$\int_0^t \sin^{-1}y\,\mathrm{d}y=t\sin^{-1}t-(1-\cos(\sin^{-1}t)),$$

正是所求。

以微分驗證

由於 $\sin^{-1} t \in [0, \frac{1}{2}\pi]$，它的餘弦非負，所以 $\cos(\sin^{-1} t) = \sqrt{1-t^2}$。因此右方為 $t\sin^{-1} t - 1 + \sqrt{1-t^2}$。對於 $0 \le t < 1$，利用 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sin^{-1} t = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ 及乘積法則（product rule），

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(t\sin^{-1} t - 1 + \sqrt{1-t^2}\right) &= \sin^{-1} t + \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} - \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \\ &= \sin^{-1} t,\end{aligned}$$

根據微積分基本定理（fundamental theorem of calculus），這正是左方的導數。兩方在 $t = 0$ 時都等於 0，所以它們在 $[0,1)$ 上相等，再由連續性，在 $t = 1$ 時亦相等。

驗算

- 當 $t = 1$：公式給出 $\frac{1}{2}\pi - 1 \approx 0.5708$。從幾何角度看，$y = \sin x$ 左方直至高度 1 的面積，等於長方形 $\frac{1}{2}\pi \times 1$ 減去拱形下方的面積 1。對 $\sin^{-1} y$ 在 $[0,1]$ 上作數值積分，得 0.57080。
- 當 $t = \frac{1}{2}$：公式給出 $\frac{\pi}{12} - 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.12782$，與辛普森法則（Simpson's rule）的結果吻合。
- 對於 $(*)$，試取 $\mathrm{f}(x) = x^2$、$s = 1$、$t = 4$：$\mathrm{F} + \mathrm{G} = \frac{1}{3} + \frac{16}{3} = \frac{17}{3} > 4$；而取 $t = 1 = \mathrm{f}(1)$ 時，則得 $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1 = st$。

常見錯誤

- 寫成 $\cos(\sin^{-1} t) = \pm\sqrt{1-t^2}$ 而沒有選定符號：$\sin^{-1}$ 的值域決定了它取正值。
- 只說「這些區域覆蓋了長方形」，卻沒有解釋為何當 $t \ne \mathrm{f}(s)$ 時不等式嚴格成立；等號的問題正需要這一點。
- 忘記 f 必須是遞增的：整幅圖都依賴這一點。

STEP 之外

不等式 $(*)$ 就是楊氏不等式（Young's inequality）。取 $\mathrm{f}(x) = x^{p-1}$，它便成為 $st \le \frac{s^p}{p} + \frac{t^q}{q}$，其中 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$；這是證明赫爾德不等式（Hölder's inequality）的關鍵步驟，

而赫爾德不等式是分析學中最常用的工具之一。F 與 G 的這種配對，讓我們初窺勒讓德變換（Legendre transform），它把拉格朗日力學（Lagrangian mechanics）與哈密頓力學（Hamiltonian mechanics）聯繫起來。如想了解這一切背後的分析學，可以閱讀 Bartle 與 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（《實分析導論》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。