詳細解答

STEP I 1987，第 5 題

純數學 • 代換積分法

> **STEP I 1987，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/87-s1-q5

關鍵思路

這個代換（substitution）的設計，是要令根號下的兩個因子都變成完全平方（perfect square）：$x-\alpha$ 變成 $\sin^2\theta$ 的某個倍數，而 $\beta-x$ 則變成 $\cos^2\theta$ 的同一倍數。於是平方根恰好與 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta$ 互相抵消，第一個積分的被積函數（integrand）便化為常數。第二個積分多保留了一個因子 $1/x$，只要把分子分母同除以 $\cos^2\theta$，它就變成一個標準的 $\tan\theta$ 積分。

解答

第一個積分，$\alpha<\beta$ 的情況

設 $x=\alpha\cos^2\theta+\beta\sin^2\theta$。利用 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$，

$$x-\alpha=\alpha\cos^2\theta+\beta\sin^2\theta-\alpha(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=(\beta-\alpha)\sin^2\theta,$$
$$\beta-x=\beta(\cos^2\theta+\sin^2\theta)-\alpha\cos^2\theta-\beta\sin^2\theta=(\beta-\alpha)\cos^2\theta,$$

以及

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}=-2\alpha\cos\theta\sin\theta+2\beta\sin\theta\cos\theta=2(\beta-\alpha)\sin\theta\cos\theta.$$

至於積分上下限：$\theta=0$ 時 $x=\alpha$，$\theta=\frac{\pi}{2}$ 時 $x=\beta$。由於在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta>0$，當 θ 走遍 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 時，x 遞增地走遍 $[\alpha,\beta]$ 恰好一次。

在這個範圍內 $\sin\theta\geq0$ 及 $\cos\theta\geq0$，而且 $\beta-\alpha>0$，所以

$$\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}=\sqrt{(\beta-\alpha)^2\sin^2\theta\cos^2\theta}=(\beta-\alpha)\sin\theta\cos\theta.$$

因此

$$\int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{2(\beta-\alpha)\sin\theta\cos\theta}{(\beta-\alpha)\sin\theta\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2} 2\,\mathrm{d}\theta = \pi,$$

即為所求。（被積函數在兩端都趨於無窮大，所以嚴格來說這是一個反常積分（improper integral）。代換顯示它是收斂（converges）的，因為變換後的被積函數是有界的常數 2。）

想一想 我們究竟在哪裏用到 $\alpha < \beta$？

只在開平方根的時候：$\sqrt{(\beta-\alpha)^2}$ 等於 $\beta-\alpha$，正正是因為 $\beta-\alpha>0$。一般而言它等於 $|\beta-\alpha|$，而這一點正是下一部分的關鍵。

第一個積分，$\alpha > \beta$ 的情況

現在積分由較大的數 α 往下積到較小的數 β。在兩者之間的區間上，$x-\alpha<0$ 且 $\beta-x<0$，所以乘積仍然是正數，被積函數依然有意義。

代換可以逐字照搬，唯一不同的是現在 $\sqrt{(\beta-\alpha)^2} = \alpha-\beta$，所以

$$\frac{2(\beta-\alpha)\sin\theta\cos\theta}{(\alpha-\beta)\sin\theta\cos\theta} = -2,$$

而積分為

$$\int_0^{\pi/2} (-2)\,\mathrm{d}\theta = -\pi.$$

還有一個更快的看法。把 α 與 β 互換時，式子 $(x-\alpha)(\beta-x)$ 保持不變，所以被積函數與第一種情況是同一個函數，只是兩個字母的角色對調了。把上下限倒轉會改變正負號，所以

$$\int_\alpha^\beta = -\int_\beta^\alpha = -\pi,$$

這裏用了第一個結果，以 β 作為較小的端點。

第二個積分，$0 < \alpha < \beta$ 的情況

用完全相同的代換，同樣地抵消後，只剩下因子 $1/x$：

$$\int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{2\,\mathrm{d}\theta}{\alpha\cos^2\theta + \beta\sin^2\theta}.$$

由於 $\alpha,\beta>0$，分母在整個 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上都是正數，所以這是一個正常積分。要計算它，把分子分母同除以 $\cos^2\theta$（對 $0\le\theta<\frac{\pi}{2}$ 成立）：

$$\int_0^{\pi/2} \frac{2\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta}{\alpha+\beta\tan^2\theta}.$$

再設 $t = \tan\theta$，則 $\mathrm{d}t = \sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$，而當 θ 由 0 增至 $\frac{\pi}{2}$ 時，t 由 0 走到 ∞：

$$\int_0^\infty \frac{2\,\mathrm{d}t}{\alpha+\beta t^2} = \frac{2}{\beta}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t^2+\alpha/\beta} = \frac{2}{\beta}\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\left[\arctan\left(t\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right)\right]_0^\infty$$
$$= \frac{2}{\sqrt{\alpha\beta}}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha\beta}},$$

即為所求。我們兩次用到 $\alpha > 0$：一是確保 $1/x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 內沒有奇點（singularity），二是確保 $\sqrt{\beta/\alpha}$ 是實數。

想一想 上限變成了 ∞。這會造成問題嗎？

不會。關於 θ 的積分完全是普通的積分；無窮上限之所以出現，只是因為當 $\theta \to \frac{\pi}{2}$ 時 $\tan\theta \to \infty$。關於 t 的積分是收斂的，因為 arctan 趨於 $\frac{\pi}{2}$；而它等於關於 θ 的積分，因為兩者都是在 $[0,\Theta]$ 上的積分當 $\Theta \to \frac{\pi}{2}$ 時的極限。

驗算

- 縮放：把 x、α、β 換成 kx、$k\alpha$、$k\beta$，第一個積分不變，第二個積分則除以 k。兩個答案 π 和 $\pi/\sqrt{\alpha\beta}$ 都符合這個性質。
- 令 $\alpha \to \beta$。這時在整個（極短的）區間上 $1/x \approx 1/\beta$，所以第二個積分應約為 π/β；而 $\pi/\sqrt{\alpha\beta} \to \pi/\beta$，果然如此。
- 數值上，取 $\alpha = 2$、$\beta = 7$，數值積分（quadrature）給出第二個積分為 0.83963，與 $\pi/\sqrt{14} = 0.83963$ 吻合。隨機選取 $\alpha < \beta$，第一個積分全部得出 π；把端點互換則得出 $-\pi$。

常見錯誤

- 在 $\alpha > \beta$ 時仍然答 π。被積函數是正的，但上下限倒過來了，所以答案是 $-\pi$。
- 寫下 $\sqrt{(\beta-\alpha)^2\sin^2\theta\cos^2\theta} = (\beta-\alpha)\sin\theta\cos\theta$，卻沒有檢查三個因子的正負號。

STEP 之外

這個代換有一個漂亮的幾何意義。由於 $x = \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\beta-\alpha}{2}\cos 2\theta$，它把以 $[\alpha,\beta]$ 為直徑的半圓參數化（parametrises），而 $\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}$ 正是該半圓在 x 處的高度。第二個積分讓你初嘗以圍道積分（contour integration）計算積分的滋味：在複分析（complex analysis）中，兩個結果都可以用留數定理（residue theorem）在短短幾行內得出。Needham 的

Visual Complex Analysis（《直觀複分析》）對此有精彩的闡述，而反常積分的嚴謹處理則見於 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。