詳細解答

STEP I 1987，第 4 題

純數學 • 對數與等比級數

> **STEP I 1987，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/87-s1-q4

關鍵思路

以不便處理的數為底的對數（logarithm），最好先化成自然對數（natural logarithm），因為這樣底數就會以一個簡單的因子出現。這裏每個底數都是 2 的冪，而指數 2^n 會降下來成為乘數。把每一項都用 $\ln 2$ 表示之後，這個級數（series）其實就是一個喬裝了的幾何級數（geometric series）。

解答

改寫通項

固定 $n \geq 0$，並設 $c = \log_{2^{2^n}} \mathrm{e}$。根據提示中的定義，這表示

$$(2^{2^n})^c = \mathrm{e}.$$

兩邊取自然對數（兩邊均為正數），得

$$c \cdot 2^n \ln 2 = \ln \mathrm{e} = 1, \qquad \text{所以} \qquad \log_{2^{2^n}} \mathrm{e} = \frac{1}{2^n \ln 2}.$$

作為對下標的驗證，$n = 0, 1, 2$ 分別給出底數 2、4、16，與首三項吻合，其值為 $\frac{1}{\ln 2}$、$\frac{1}{2\ln 2}$、$\frac{1}{4\ln 2}$。

> ? **想一想** 2^n 是從哪裏來的？

來自法則 $\ln(a^k) = k \ln a$，取 $a = 2$ 及 $k = 2^n$：底數 2^{2^n} 的自然對數是 $2^n \ln 2$。正是指數的「塔」令每個底數都是前一個的平方，而底數平方會令對數減半。

求級數之和

因此級數為

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \log_{2^{2^n}} \mathrm{e} = \frac{1}{\ln 2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

這是首項為 1、公比為 $r = -\frac{1}{2}$ 的幾何級數。由於 $|r| < 1$，它收斂（converges），其和為 $\frac{1}{1-r} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$。因此

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \log_{2^{2^n}} \mathrm{e} = \frac{2}{3\ln 2} = \frac{1}{\frac{3}{2}\ln 2} = \frac{1}{\ln(2^{3/2})} = \frac{1}{\ln(2\sqrt{2})},$$

這裏再次用了 $\ln(a^k) = k\ln a$，以及 $2^{3/2} = 2\cdot 2^{1/2} = 2\sqrt{2}$。這就是所求的和。

驗算

數值上，$\frac{1}{\ln(2\sqrt{2})} \approx 0.96180$。級數的部分和（partial sums）為 1.4427、0.7213、1.0820、0.9017、0.9919、0.9468,...，在此值兩側來回擺動，而差距每次減半，正如交錯幾何級數應有的表現。取六十項時，結果與 0.961797 在機器精度內一致。

常見錯誤

- 把 $\log_{2^{2^n}}$ 誤讀為 $\log_{2^{2n}}$：這樣會得出底數 2、16、256,... 及錯誤的公比 $-\frac{1}{4}$。應該用首幾項來核對下標。
- 寫成 $\log_a \mathrm{e} = \ln a$，而不是 $\frac{1}{\ln a}$。換底公式（change-of-base rule）給出 $\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$，而這裏 $\ln b = 1$。

STEP 之外

一個無窮和究竟是否「有值」，正是分析學（analysis）入門課程的核心問題。幾何級數是最基本的參照標準：許多收斂判別法，例如比值判別法（ratio test），都是透過把級數與幾何級數比較來運作的。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）細緻而易讀地建立了這套理論。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。