詳細解答

STEP I 1987，第 3 題

純數學 • 可分離變量微分方程

> **STEP I 1987，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/87-s1-q3

關鍵思路

這條方程以 v 表示時看似棘手，但左邊其實很容易辨認：$x^3v' + x^2v$ 正是 x^2 乘以 xv 的導數（derivative）。因此，題目建議的代換（substitution）把左邊變成 x^2y'；而右邊改用 y 表示後，變量可以乾淨利落地分離（separate）。之後只需運用部分分式（partial fractions），再小心選取正負號。

解答

變量代換

設 $y = xv$，由乘積法則（product rule）得 $y' = v + xv'$，因此

$$x^3\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + x^2v = x^2\left(x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\right) = x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

在右邊，$x^2v^2 = y^2$ 而 $v = y/x$，所以右邊為

$$\frac{1+y^2}{(1+x^2)\,y/x} = \frac{x(1+y^2)}{(1+x^2)\,y}.$$

方程變為

$$x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x(1+y^2)}{(1+x^2)\,y}, \qquad \text{即} \qquad \frac{y}{1+y^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x(1+x^2)},$$

這是把兩邊除以 x^3（我們在 $x = 1$ 附近考慮，故 $x > 0$），再乘以 $y/(1+y^2)$ 所得。變量已經分離。

積分

左邊積分得 $\frac{1}{2}\ln(1+y^2)$。至於右邊，用部分分式可得

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2},$$

只要把右邊通分便可輕易驗證。因此，當 $x>0$ 時，

$$\tfrac{1}{2}\ln(1+y^2) = \ln x - \tfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + C, \qquad \text{因此} \qquad 1+y^2 = \frac{Ax^2}{1+x^2}$$

其中 $A = \mathrm{e}^{2C}$ 為正常數。

當 $x=1$ 時 $v=1$，故 $y=1$，於是 $2 = A/2$，即 $A=4$。因此

$$y^2 = \frac{4x^2}{1+x^2} - 1 = \frac{3x^2-1}{1+x^2}, \qquad v^2 = \frac{y^2}{x^2} = \frac{3x^2-1}{x^2(1+x^2)}.$$

? **想一想** 應該取哪一個平方根？解在哪個範圍內成立？

原方程的分母含 v，所以解永遠不能經過 $v=0$；由於解是連續的，它會保持在 $x=1$ 處的符號，即正號。因此取正平方根：

$$\boxed{v(x) = \frac{\sqrt{3x^2-1}}{x\sqrt{1+x^2}}}$$

此解在 $x > 1/\sqrt{3}$ 時成立。當 x 減小至 $1/\sqrt{3}$ 時，v 降至 0，方程便不再成立，所以解不能延伸到該點以下。

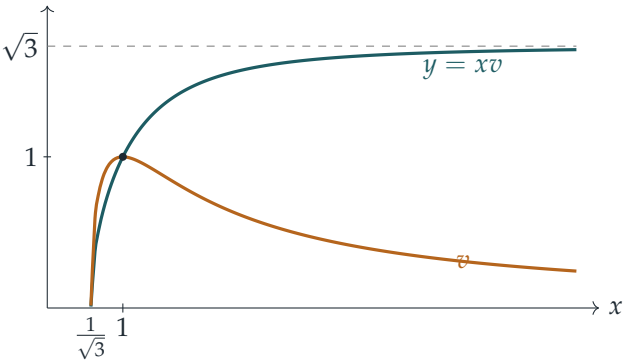
x 很大時

分子分母同除以 x^2，

$$v(x) = \frac{1}{x}\cdot\frac{\sqrt{3-1/x^2}}{\sqrt{1+1/x^2}} \approx \frac{\sqrt{3}}{x},$$

所以當 $x\to\infty$ 時 $v(x)\to 0$。等價地說，$y = xv \to \sqrt{3}$：y 的圖像有水平漸近線（horizontal asymptote）$y=\sqrt{3}$，而 $v = y/x$ 則像 $\sqrt{3}/x$ 那樣衰減。

事實上，起點正是最高點：設 $u = x^2$，則 $(3u-1)/(u^2+u)$ 的導數的分子為 $-(3u+1)(u-1)$，所以 v 上升至在 $x=1$ 處的最大值 1，然後遞減並趨向 0。



驗算

- 當 $x = 1$：$v = \sqrt{2}/(1 \cdot \sqrt{2}) = 1$，符合要求。
- 代回驗證：由 $1 + y^2 = 4x^2/(1 + x^2)$ 作隱函數微分（implicit differentiation）得 $2yy' = 8x/(1 + x^2)^2$，而 $(1 + y^2)/(x(1 + x^2)) = 4x/(1 + x^2)^2$，所以 $yy'/(1 + y^2) = 1/(x(1 + x^2))$，與預期相符。
- 數值上，以龍格—庫塔法（Runge–Kutta method）從 $(1, 1)$ 起逐步求解原方程，得 $v(10) \approx 0.172058$，與公式吻合；而在 $x = 10^4$ 時，公式給出 $xv \approx 1.73205 \approx \sqrt{3}$。

常見錯誤

- 把極限答成 $\sqrt{3}$：那是 y 的極限，但題目問的是 v，它趨向 0。
- 錯誤地處理常數的指數：$\ln(1 + y^2) = \ln \frac{x^2}{1+x^2} + 2C$ 應得出 $1 + y^2 = Ax^2/(1 + x^2)$，即一個相乘的常數，而不是 $x^2/(1 + x^2) + 2C$。
- 開平方時寫上 $\pm$ 卻沒有作出取捨：條件 $v(1) = 1$ 及不容許 $v = 0$ 已確定要取正號。

STEP 之外

這裏的代換之所以奏效，是因為左邊在整體相乘後成為一個恰當導數（exact derivative），這與積分因子（integrating factor）和齊次方程（homogeneous equation）背後的想法如出一轍。處理正負號和定義域時所需的謹慎，讓我們初步窺見存在性與唯一性理論（existence and uniqueness theory）：經過某一給定點的解會一直存在，直至遇到令方程失去意義的地方，在這裏就是 $v = 0$。Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）討論了可分離方程（separable equation），以及解能延伸多遠的問題。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。