詳細解答

STEP I 1987，第 2 題

純數學 • 圓填充的面積

> **STEP I 1987，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/87-s1-q2

關鍵思路

把各個小圓的圓心連起來。這些圓心全都位於半徑為 R 的圓上，即恰好在兩個大圓的正中間；它們構成一個正 n 邊形（regular polygon），而這個多邊形的各邊都穿過相鄰小圓的切點。這個多邊形正是劃分 Y（在多邊形內）和 X（在多邊形外）兩部分的分界線。因此，每一塊面積都可以由三種簡單圖形得出：多邊形、圓盤，以及由多邊形頂點截出的小圓扇形（sector）。

解答

n、R 與 r 的關係

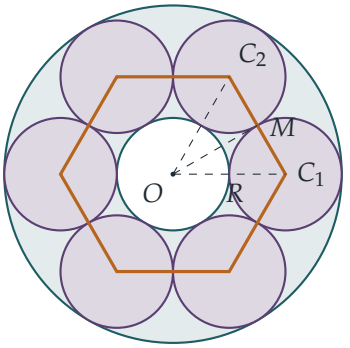
每個小圓都與兩個大圓相切，所以它的圓心與公共圓心 O 的距離是 $R - r + r = R$：全部 n 個圓心都在半徑為 R 的圓上。由對稱性可知，這些圓心等距分佈，所以相鄰的圓心 C_1、C_2 在 O 處所張的角是 $2\pi/n$。

兩個相鄰的圓互相相切，所以 $C_1C_2 = 2r$。在等腰三角形（isosceles triangle）OC_1C_2 中，$OC_1 = OC_2 = R$；從 O 向 C_1C_2 的中點 M 作垂線，可得

$$r = C_1M = R\sin\frac{\pi}{n}.$$

這就是所求的關係。（我們需要 $n \geq 3$；若 $n = 2$，內圓的半徑會是 $R - r = 0$。）同一個三角形亦給出

$$OM = R\cos\frac{\pi}{n} = \sqrt{R^2 - r^2}.$$



上圖（以 $n = 6$ 繪畫）用琥珀色顯示由圓心構成的多邊形。它的各邊都穿過相鄰圓的切點，例如 M。

面積 Y

這個多邊形由 n 個與 OC_1C_2 全等（congruent）的三角形組成，每個的面積是 $\frac{1}{2} \cdot 2r \cdot \sqrt{R^2 - r^2}$。所以

$$\text{多邊形的面積} = nr\sqrt{R^2 - r^2}.$$

多邊形內有甚麼？它的內切圓半徑（inradius）是 $OM = \sqrt{R^2 - r^2}$，而 $R^2 - r^2 \geq (R - r)^2$，因為這個不等式（inequality）移項整理後就是 $2r(R - r) \geq 0$。所以半徑為 $R - r$ 的內圓盤位於多邊形之內。每個頂點處都有一個小圓的扇形。正 n 邊形的內角（interior angle）是 $\pi - \frac{2\pi}{n}$，所以每個這樣的扇形面積是

$$\tfrac{1}{2}r^2\left(\pi - \frac{2\pi}{n}\right) = \pi r^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right).$$

這 n 個扇形和內圓盤彼此不重疊，因為小圓之間以及小圓與內圓之間都只是相切。多邊形餘下的部分，恰好就是緊貼內圓的 n 個曲邊三角形，而它們合起來就是 Y：

$$Y = nr\sqrt{R^2 - r^2} - \pi(R - r)^2 - n\pi r^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right),$$

正如所求。

想一想 為甚麼邊 C_1C_2 正是把 X 與 Y 分開的恰當位置？

邊 C_1C_2 由圓心連到圓心，並穿過切點 M，所以它永遠不會穿過圓與圓之間的空隙。所有緊貼內圓的空隙都在它靠 O 的一側，而所有緊貼外圓的空隙都在另一側。因此沿着多邊形切開，便能乾淨地把兩類空隙分開；而且它沿兩條半徑切開每個小圓，這就是我們得到扇形的原因。

面積 X 與 Z

在多邊形之外而外圓之內的區域，我們要除去每個小圓餘下的部分。餘下的部分是一個優角扇形（reflex sector），角度為 $2\pi-(\pi-\frac{2\pi}{n})=\pi+\frac{2\pi}{n}$，面積為 $\pi r^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)$。因此

$$X=\pi(R+r)^2-nr\sqrt{R^2-r^2}-n\pi r^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right).$$

n 個半徑為 r 的圓盤給出

$$Z=n\pi r^2.$$

當 $n\to\infty$ 時的極限

兩式相加，多邊形的項互相抵消，而扇形的項合併為 $n\pi r^2$：

$$\begin{aligned}X+Y&=\pi(R+r)^2-\pi(R-r)^2-n\pi r^2\\&=4\pi Rr-n\pi r^2.\end{aligned}$$

這其實就是圓環（annulus）的面積減去各小圓的面積，理應如此。因此

$$\frac{X+Y}{Z}=\frac{4\pi Rr-n\pi r^2}{n\pi r^2}=\frac{4R}{nr}-1=\frac{4}{n\sin(\pi/n)}-1,$$

這裏用了 $r=R\sin(\pi/n)$。當 $n\to\infty$ 時，$\pi/n\to 0$ 且 $\dfrac{\sin(\pi/n)}{\pi/n}\to 1$，所以 $n\sin(\pi/n)\to\pi$，從而

$$\frac{X+Y}{Z}\to\frac{4}{\pi}-1\approx 0.273.$$

驗算

- 取 $n=3$、$R=1$，得 $r=\frac{\sqrt{3}}{2}$、$Y\approx 0.0646$ 及 $X\approx 3.7497$。在精細的極坐標網格上進行數值積分，把每一點分類為在某個圓內、在多邊形內或在多邊形外，結果在 $n=3,5,8,12$ 時均與公式吻合至四位有效數字。
- 比值 $\frac{4}{n\sin(\pi/n)}-1$ 在 $n=10$ 時為 0.2944，在 $n=100$ 時為 0.27345，在 $n=1000$ 時為 0.273240。它正逐漸逼近 $4/\pi-1=0.273240\ldots$。
- 直觀地（heuristically）看，當 n 很大時，這些圓就像寬度為 $2r$ 的長條中一排直徑為 $2r$ 的圓盤。每個 $2r\times 2r$ 的正方形中，圓盤佔 πr^2，空隙佔 $4r^2-\pi r^2$，所以比值是 $(4-\pi)/\pi$。

常見錯誤

- 計算扇形時誤用多邊形的外角（exterior angle）$2\pi/n$，而不是內角 $\pi-2\pi/n$。

► 計算 Y 時忘記除去內圓盤，或沒有驗證內圓盤確實位於多邊形之內。

STEP 之外

最後的極限（limit）其實就是改頭換面的 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$。正是同一事實，讓阿基米德（Archimedes）能夠用內接和外切多邊形的周長把 π 夾在中間。這道題亦是圓填充密度問題（circle-packing density problem）的一個簡化版本，這裏問的是：這些圓能填滿一個狹窄圓環的多少比例？若想嚴格處理這類極限，可以閱讀 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。