詳細解答

STEP I 1987，第 14 題

概率與統計 • 概率的等比級數

> **STEP I 1987，第 14 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/87-s1-q14

關鍵思路

第一局打完之後，一場仍未分勝負的錦標賽便完全沒有自由度可言。每局的勝者要對上該局的裁判（referee）；若錦標賽要繼續未分勝負，裁判就必須勝出，因此下一局的勝者是被迫決定的。所以一切只取決於誰贏第 1 局，以及某位選手首次連勝兩局的那一刻。之後各概率便化為以週期（period） 3 循環的幾何級數（geometric series）。

解答

在整個過程中，每局都由上一局的勝者對上上一局的裁判。上一局的負方在旁擔任裁判，因此不可能贏當前這一局。

第 (i) 部分

第 1 局：A 擊敗 B，由 B 擔任第 2 局的裁判。第 2 局是 A 對 C，而 C 勝出，這是可能的。第 3 局是 C 對 B，而 B 勝出，這同樣可能。但沒有人連勝兩局，所以在 ACB 之後錦標賽仍未分勝負，必須繼續。因此 ACB **不是**一場完整錦標賽的紀錄（它只是一場錦標賽的開頭）。

第 (ii) 部分

A 贏了第 1 局後，第 2 局是 A 對 C，由 B 擔任裁判。所以 B 不可能贏第 2 局，ABB 是**不可能**的。

第 (iii) 部分

與 (i) 一樣，首三局 ACB 是可能的，而第 3 局是 C 對 B，由 A 擔任裁判。所以第 4 局是 B 對 A，而 B 可以贏這一局。這時 B 連贏了第 3 和第 4 局，錦標賽結束。因此 $ACBB$ **是**一場完整的錦標賽，由 B 在四局內勝出。

5 局後仍未分勝負

設 X 贏第 1 局，其中 X 是 A 或 B，並設 Y 為另一人。若錦標賽要保持未分勝負，每局都必須由不是上一局勝者的選手勝出，而這只能是上一局的裁判。這就迫使紀錄為

$$X\,C\,Y\,X\,C\,Y\,X\,\ldots$$

因為每位新的勝者都是上一局的裁判。具體來說，第 2 局是 X 對 C（由 Y 擔任裁判），所以 C 必須勝出。第 3 局是 C 對 Y（由 X 擔任裁判），所以 Y 必須勝出。第 4 局是 Y 對 X，所以 X 必須勝出，如此類推，週期為 3。

第 1 局誰勝都可以。之後，每多一局保持未分勝負的概率都是 $\frac{1}{2}$，因為各局互相獨立 (independent)，而且每位選手的勝算均等。所以

$$P(n \text{ 局後仍未分勝負}) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1}, \qquad P(5 \text{ 局後仍未分勝負}) = \tfrac{1}{16}.$$

誰勝出，何時勝出

錦標賽在第 n 局（對 $n \geq 2$）結束，當且僅當 $n-1$ 局後仍未分勝負，而第 $n-1$ 局的勝者再次勝出。其概率為 $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$。冠軍就是第 $n-1$ 局的勝者，即被迫序列中的第 $(n-1)$ 個字母。記 $k = n-1$，則：

$k \bmod 3$	1	2	0
若 A 贏第 1 局，冠軍為	A	C	B
若 B 贏第 1 局，冠軍為	B	C	A

所以錦標賽在第 $k+1$ 局結束的概率為 $\left(\frac{1}{2}\right)^{k}$。若 $k \equiv 2 \pmod 3$，這整個概率都歸 C。否則它由 A 和 B 平分，各得 $\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$。

想一想 為甚麼在 $k \equiv 2$ 時 C 得到全部概率，而在其他時候只得一半？

無論誰贏第 1 局，C 永遠是被迫序列中的第二個字母。所以兩個分支都在同樣的時刻讓 C 勝出。A 和 B 在兩個分支之間互換角色，所以他們各自只能取得自己佔據該位置的那一個分支。

在 5 局或以內勝出

這裏 $n = 2,3,4,5$，所以 $k = 1,2,3,4$：

$$\begin{aligned} P(A \text{ 勝出，局數} \le 5) &= \underbrace{\tfrac{1}{4}}_{k=1} + \underbrace{\tfrac{1}{16}}_{k=3} + \underbrace{\tfrac{1}{32}}_{k=4} = \tfrac{11}{32}, \\ P(B \text{ 勝出，局數} \le 5) &= \tfrac{11}{32} \quad \text{（由 } A \text{ 與 } B \text{ 之間的對稱性），} \\ P(C \text{ 勝出，局數} \le 5) &= \underbrace{\tfrac{1}{4}}_{k=2}. \end{aligned}$$

驗算一下，$\frac{11}{32} + \frac{11}{32} + \frac{8}{32} = \frac{15}{16} = 1 - \frac{1}{16}$，與 5 局後仍未分勝負的概率吻合。

最終勝者

由於 $P(n \text{ 局後仍未分勝負}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \to 0$，錦標賽以概率 1 結束。所以我們只需對所有 $k \ge 1$ 求和。每個剩餘類（residue class）都給出一個公比為 $\frac{1}{8}$ 的幾何級數：

$$\begin{aligned} P(C \text{ 勝出}) &= \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{32} + \tfrac{1}{256} + \cdots = \frac{1/4}{1 - 1/8} = \frac{2}{7}, \\ P(A \text{ 勝出}) &= \underbrace{\left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{32} + \cdots\right)}_{k \equiv 1} + \underbrace{\left(\tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{128} + \cdots\right)}_{k \equiv 0} = \frac{1/4}{7/8} + \frac{1/16}{7/8} = \frac{2}{7} + \frac{1}{14} = \frac{5}{14}, \end{aligned}$$

正如所求。由對稱性，$P(B \text{ 勝出}) = \frac{5}{14}$ 亦然，而且確實 $\frac{5}{14} + \frac{5}{14} + \frac{2}{7} = 1$。

所以第一局在旁輪空的 C 處於劣勢：$\frac{2}{7} \approx 0.286$，而其餘兩人各有 $\frac{5}{14} \approx 0.357$。

驗算

- 三個在 5 局內勝出的概率之和為 $\frac{15}{16}$，而最終勝出的概率之和為 1。
- 以分數對所有可能的對局序列作精確枚舉，確認了 $\frac{1}{16}$、$\frac{11}{32}$、$\frac{11}{32}$、$\frac{1}{4}$。計算至 60 局，得出 A 和 B 的值為 0.357142…，C 的值為 0.285714…。
- 求 C 的另一個快捷方法：設 c 為 C 勝出的概率。第 1 局後，C 立即勝出的概率為 $\frac{1}{4}$。若三局之後局面回到相同的情況（概率為 $\frac{1}{8}$），便重新開始，所以 $c = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}c$，得 $c = \frac{2}{7}$。

常見錯誤

- 說 ACB 是有效的紀錄：其中每一局都是可能的，但沒有人連勝兩局，所以錦標賽還未結束。

- 忘記上一局的負方擔任裁判，因而不能贏下一局（這排除了 ABB）。
- 在 $k \equiv 2$ 時只給 C 一半的概率：C 在兩個分支中都在這些時刻勝出。

STEP 之外

這個錦標賽是一條馬可夫鏈（Markov chain）：每局之後的狀態就只是「上一局誰贏、誰當裁判」，而當鏈被吸收（absorbed）時冠軍便決定了。「驗算」一節中的首步分析（first-step argument），即透過以下一步發生的事為條件，為某個概率寫出方程，是求吸收概率（absorption probability）的標準方法，而且無須對級數求和。Grimmett 和 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）在大學一年級程度介紹馬可夫鏈與吸收。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。