詳細解答

STEP I 1987，第 13 題

力學 • 變力

> **STEP I 1987，第 13 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/87-s1-q13

關鍵思路

力的規律在 $x = 0$ 處改變，因此運動分成幾個階段，每個階段都由一條簡單的線性微分方程（differential equation）支配。在正方向的一側，力是與位移成正比的回復力（restoring force），即簡諧運動（simple harmonic motion）；在負方向的一側，力是與速度成正比的阻力（resistance），令速率呈指數衰減（exponential decay）。一個階段結束時的位置和速度，就是下一個階段的初始條件（initial conditions）。真正的問題在於共有多少個階段：質點究竟會不會回來？

解答

模型

把物體視為 x 軸上只受所給的力作用的質點，並記 $\dot{x} = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$。牛頓第二定律（Newton's second law）$m\ddot{x} = \mathrm{F}$ 給出

$$\ddot{x} = -\mu^2 x \quad (x \geq 0), \qquad\qquad \ddot{x} = -\kappa\dot{x} \quad (x < 0).$$

質量互相抵消，因此與答案無關。

第一階段：$x \geq 0$ 時的簡諧運動

由於 $v_0 > 0$，質點立即進入 $x > 0$ 的區域，在那裏 $\ddot{x} = -\mu^2 x$。這是角頻率（angular frequency）為 μ 的簡諧運動，其通解（general solution）為

$$x = A\cos\mu t + B\sin\mu t.$$

條件「$t=0$ 時 $x=0$」給出 $A=0$，而「$t=0$ 時 $\dot{x}=B\mu=v_0$」給出 $B=v_0/\mu$。因此

$$x=\frac{v_0}{\mu}\sin\mu t,\qquad \dot{x}=v_0\cos\mu t.$$

只要 $x\geq 0$，即 $\sin\mu t\geq 0$，這個解便成立，也就是 $0\leq t\leq \pi/\mu$。質點在 $t=\pi/(2\mu)$ 時到達最大位移 v_0/μ，並在

$$t=T=\frac{\pi}{\mu},\qquad \text{此時速度為}\qquad \dot{x}=v_0\cos\pi=-v_0.$$

時返回原點。它回來時的速率與出發時相同，因為在這一側能量守恆（力 $-m\mu^2x$ 來自位能（potential energy）$\frac{1}{2}m\mu^2x^2$，而位能在原點為零）。

第二階段：$x<0$ 時的受阻運動

質點以速度 $-v_0$ 進入 $x<0$ 的區域，在那裏 $\ddot{x}=-\kappa\dot{x}$。記 $u=\dot{x}$，這就是一階方程（first-order equation）$\mathrm{d}u/\mathrm{d}t=-\kappa u$，滿足「$t=T$ 時 $u=-v_0$」的解為

$$\dot{x}=-v_0\,\mathrm{e}^{-\kappa(t-T)}.$$

利用「$t=T$ 時 $x=0$」積分：

$$x=\int_T^t -v_0\,\mathrm{e}^{-\kappa(s-T)}\,\mathrm{d}s=-\frac{v_0}{\kappa}\left(1-\mathrm{e}^{-\kappa(t-T)}\right).$$

想一想 質點會不會回到 $x\geq 0$，開始第三個階段？

不會。對每個 $t>T$，速度 $-v_0\mathrm{e}^{-\kappa(t-T)}$ 都是負數，所以在整個階段中 x 不斷減少；對所有 $t>T$，它都嚴格為負，上面的公式永遠成立。阻力令質點減速，卻永遠不會令它反向。當 $t\to\infty$ 時，$\mathrm{e}^{-\kappa(t-T)}\to 0$，因此質點趨近點 $x=-v_0/\kappa$，但永遠不會到達。

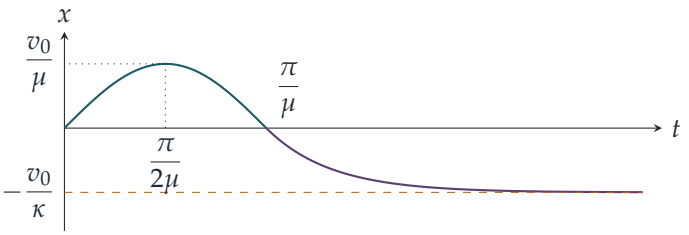
答案

$$x=\begin{cases}\dfrac{v_0}{\mu}\sin\mu t, & 0\leq t\leq\dfrac{\pi}{\mu},\\[2ex] -\dfrac{v_0}{\kappa}\left(1-\mathrm{e}^{-\kappa(t-\pi/\mu)}\right), & t>\dfrac{\pi}{\mu}.\end{cases}$$

兩段在 $t=\pi/\mu$ 處都有 $x=0$ 和 $\dot{x}=-v_0$，所以圖像在該處是光滑的（斜率連續），儘管 $\ddot{x}$ 從 0 跳到 κv_0。

草圖

圖像先是軸上方半個正弦曲線的拱形，接着是一條以相同斜率 $-v_0$ 離開原點的曲線，並逐漸趨平，趨近漸近線（asymptote）$x=-v_0/\kappa$。（草圖取 $\mu=1$、$\kappa=1$。）



一般而言，峯高 v_0/μ 與漸近線的深度 v_0/κ 互不相關：阻力較弱（κ 較小）時，質點會向左漂移很遠。

驗算

- 單位：μ 和 κ 的單位都是 s^{-1}，所以 v_0/μ 和 v_0/κ 都是長度，理應如此。
- 極限情況：當 $\kappa \to 0$ 時沒有阻力，而確實 $-\frac{v_0}{\kappa}(1-\mathrm{e}^{-\kappa s}) \to -v_0 s$，即以速率 v_0 作勻速運動。
- 數值驗證：取 $\mu = 1.7$、$\kappa = 0.9$、$v_0 = 2.2$，用龍格—庫塔法（Runge–Kutta method）逐步求解運動方程，在 $0 \le t \le 15$ 範圍內與公式的誤差在 3×10^{-5} 以內；質點的峯值為 $x = 1.2941 = v_0/\mu$，最終停在 $x = -2.4444 = -v_0/\kappa$ 附近。

常見錯誤

- 第二階段的時間由 $t = 0$ 而不是由 $t = \pi/\mu$ 起計：指數必須是 $-\kappa(t - \pi/\mu)$。
- 忘記檢查質點會否重新進入 $x \ge 0$；題目要求的是其後的整個運動，所以「沒有第三階段」這個結論需要一句理由支持。

STEP 之外

這裏的力在 $x = 0$ 兩側各是一個不同的線性表達式，屬於分段線性系統（piecewise-linear system）；把各段的解拼接起來、在切換點匹配位置和速度的技巧，是微分方程入門課程處理這類系統（以及碰撞和摩擦問題）的標準方法。若同時加入兩項，得 $\ddot{x} + \kappa\dot{x} + \mu^2 x = 0$，這就是阻尼諧振子（damped harmonic oscillator），它的欠阻尼（underdamped）、臨界阻尼（critically damped）和過阻尼（overdamped）三種情況，是任何力學入門課程的核心例子。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）對阻尼振子有細緻的討論。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。