詳細解答

STEP I 1987，第 12 題

力學 • 拋體與恢復係數

> **STEP I 1987，第 12 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/87-s1-q12

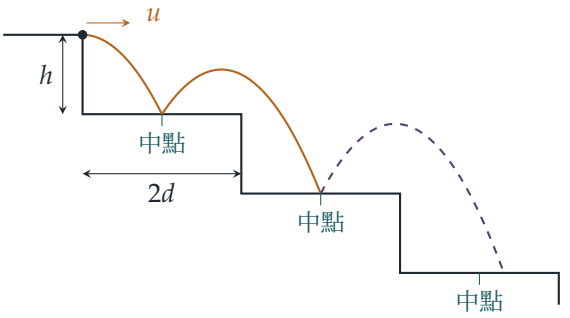
關鍵思路

在兩次反彈之間，粒子是一個拋射體（projectile）；而（台階光滑時）每次反彈只會把速度的鉛直分量反向並按比例縮小，所以水平速率始終不變。這意味著水平距離決定了每段飛行的時間，而飛行時間加上一級台階的落差又決定了鉛直速率。所有量都可以用第一次下落的時間來表示，令代數運算非常簡短。

解答

模型

把粒子視為質點（point mass），忽略空氣阻力，並假設台階光滑且水平，因此每次撞擊不改變水平速度，而鉛直速度則乘以 $-e$。設粒子被踢出時的水平速率為 u，並設 t_1 為第一段飛行的時間。



實線弧是首兩段飛行；虛線弧是接下來實際發生的情況（見最後一部分）。

恢復係數

第一段飛行。粒子開始時沒有鉛直速度，下落 h，並水平移動 d（半個台階寬度，即到達第一級台階的中點）。因此

$$h = \tfrac{1}{2}gt_1^2, \qquad d = ut_1.$$

粒子以向下的鉛直速率 gt_1 撞擊第一級台階，然後以向上的鉛直速率 egt_1 離開，水平速率仍是 u。

第二段飛行。由第一級台階的中點到第二級台階的中點，水平距離為 $2d$。由於水平速率仍是 $u = d/t_1$，這段飛行歷時

$$T = \frac{2d}{u} = 2t_1.$$

在這段時間內，粒子最終必須下降高度 h。取向上為正，

$$\begin{aligned} -h &= (egt_1)(2t_1) - \tfrac{1}{2}g(2t_1)^2 \\ &= (2e-2)\,gt_1^2 \\ &= (2e-2)(2h), \end{aligned}$$

其中用了 $gt_1^2 = 2h$。兩邊除以 h 得 $-1 = 4e - 4$，所以

$$e = \tfrac{3}{4}.$$

（在這段飛行中，粒子越過第一級台階邊緣時，位於該台階上方 $egt_1 \cdot t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2 = \frac{1}{2}h$ 的高度，所以它確實能越過邊緣。）

能否一直持續下去？

想一想 如果這個規律持續下去，之後每一段飛行必須是怎樣的？

每段由一級台階中點飛到下一級台階中點的飛行，都以速率 u 水平移動 $2d$，所以每段都歷時 $2t_1$，而且每段都必須恰好下降 h。由上面的計算可知，每次反彈後瞬間向上的鉛直速率 w 必須滿足

$$-h = w(2t_1) - 2gt_1^2 = 2wt_1 - 4h, \qquad \text{所以} \qquad w = \frac{3h}{2t_1} = \tfrac{3}{4}gt_1.$$

因此每次反彈後，粒子都必須以鉛直速率 $\frac{3}{4}gt_1$ 離開；由於 $e = \frac{3}{4}$，它到達每一級台階時的鉛直速率都必須恰好是 gt_1。

這在第一級台階成立，但在第二級台階並不成立。經過歷時 $2t_1$ 的飛行到達第二級台階時，其鉛直速度為

$$\tfrac{3}{4}gt_1 - g(2t_1) = -\tfrac{5}{4}gt_1,$$

所以它以向下速率 $\frac{5}{4}gt_1$（而非 gt_1）撞擊第二級台階，並以向上速率 $\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}gt_1=\frac{15}{16}gt_1>\frac{3}{4}gt_1$ 反彈。所以這是**不可能的**：粒子不能擊中每一級台階的中點。事實上，它會越過第三級台階的中點。設第三段飛行歷時 st_1，則

$$-h=\tfrac{15}{16}gt_1(st_1)-\tfrac{1}{2}gs^2t_1^2 \quad\Longrightarrow\quad s^2-\tfrac{15}{8}s-1=0 \quad\Longrightarrow\quad s=\frac{15+\sqrt{481}}{16}\approx 2.31,$$

所以它水平移動約 $2.31d$，落在第三級台階上、中點以外約 $0.31d$ 處（仍在該台階上，因為遠端邊緣在 $3d$ 之外）。

驗算

- $e=\frac{3}{4}$ 與 g、h 或 d 無關，這是理所當然的：把整道樓梯按比例放大或縮小，並不會改變路徑的形狀。
- 以 $g=9.8$、$h=d=1$ 及 $e=0.75$ 進行數值模擬，粒子落在 $x=1.000$ 及 $x=3.000$（首兩級台階的中點），然後落在 $x\approx 5.308$，與上面預測的 $3+2.308$ 吻合。
- 若沒有反彈（$e=0$），第二段飛行在時間 $2t_1$ 內會下降 $4h$；反彈必須補回其中的 $3h$，即 $2t_1\cdot w=3h$，與所得結果一致。

常見錯誤

- 把第一段水平距離當成 $2d$ 而不是 d：粒子由邊緣出發，落在第一級台階的中點。
- 在反彈時改變了水平速率。在光滑表面上，衝量（impulse）是鉛直的，所以只有鉛直分量會改變。
- 因為每段飛行看似相同而得出「可以」的結論：到達時的速率會不斷增大，所以反彈也會隨之增大。

STEP 之外

彈跳的粒子是*離散動力系統*（discrete dynamical system）的一個簡單例子：某次反彈後瞬間的狀態，經由一個固定的映射決定下一次反彈後的狀態；而問運動能否重複，就是問這個映射的不動點（fixed point）。在這裏，不動點（反彈速率為 $\frac{6}{7}gt_1$，只會落低 $\frac{4}{7}h$）與這道樓梯並不相容，所以沒有任何周期運動（periodic motion）能符合。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）對碰撞與衝量有細緻的討論。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。