詳細解答

STEP I 1987，第 11 題

力學 • 圓周運動與能量

STEP I 1987，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/87-s1-q11

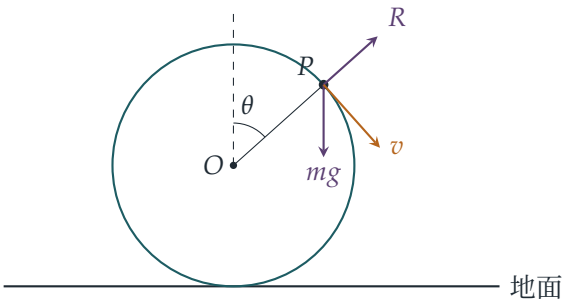
關鍵思路

質點留在球面上時作圓周運動（circular motion），因此由兩條方程支配：能量守恆（conservation of energy）給出其速率，而沿半徑方向應用牛頓（Newton）第二定律則給出法向反作用力（normal reaction）。當反作用力降至零的一刻，質點便離開球面。此後質點成為拋射體（projectile），所以其水平速度不再改變；把這一點與由頂部一直到地面的能量守恆結合，便可得出鉛直速度，而毋須求出軌跡。

解答

模型

把質點視為一個質點（point mass），置於一個光滑、固定的球面上，球心為 O，位於地面之上高度 r 處（球體擱在地面上）。「輕輕移動」的意思是質點從頂部出發時速率可忽略不計。設 P 為質點所在位置，θ 為 OP 與向上鉛垂線之間的角，v 為其速率。作用於質點的力只有重量 mg 及沿 OP 向外的法向反作用力 R。



何處離開球面

質點已下降高度 $r - r\cos\theta$，因此由能量守恆（反作用力與運動方向垂直，故不作功）得

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = mgr(1-\cos\theta), \qquad \text{所以} \qquad v^2 = 2gr(1-\cos\theta).$$

質點與球面接觸時沿半徑為 r 的圓運動，因此其指向 O 的加速度為 v^2/r。沿指向 O 的方向分解：

$$mg\cos\theta - R = \frac{mv^2}{r} = 2mg(1-\cos\theta), \qquad \text{所以} \qquad R = mg(3\cos\theta - 2).$$

在頂部時 $R = mg > 0$，而 R 隨 θ 增大而減少。當 $R = 0$ 時質點離開球面，即當

$$\cos\theta = \tfrac{2}{3}, \qquad v^2 = \tfrac{2}{3}gr.$$

想一想 速度與水平線所成的角，是哪一個角？

速度沿圓的切線（tangent）方向，而切線與半徑 OP 垂直。半徑與鉛垂線成角 θ，所以切線與水平線所成的角同樣是 θ（把兩條線都轉一個直角即可）。因此，質點離開球面的一刻，正以水平線之下

$$\cos^{-1}\tfrac{2}{3} \approx 48.2^\circ$$

的角度向下運動。

撞擊地面

離開球面的一刻，速度的水平分量為

$$v\cos\theta = \sqrt{\tfrac{2}{3}gr}\cdot\tfrac{2}{3}, \qquad \text{所以} \qquad (v\cos\theta)^2 = \tfrac{8}{27}gr.$$

此後唯一的作用力是重力，所以這個水平分量直至質點到達地面都保持不變。（質點不會再碰到球面：一旦 R 會變成負數，球面向外彎離的速度便快於質點下墮的速度；而質點落地點與通過 O 的鉛垂線的水平距離約為 $1.46r$，遠離球體。）

現在對整個運動應用能量守恆，由頂部（高度 $2r$）靜止開始，一直到地面。質點以速率 V 撞擊地面，其中

$$\tfrac{1}{2}mV^2 = mg(2r), \qquad \text{所以} \qquad V^2 = 4gr.$$

設 V_y 為撞擊時速度的鉛直分量，則 $V^2 = (v\cos\theta)^2 + V_y^2$，所以

$$V_y^2 = 4gr - \tfrac{8}{27}gr = \tfrac{100}{27}gr, \qquad V_y = \frac{10}{3}\sqrt{\frac{gr}{3}}.$$

因此，質點撞擊地面時動量（momentum）的鉛直分量的大小為

$$mV_y = \frac{10m}{3}\sqrt{\frac{gr}{3}} = \frac{10m\sqrt{3gr}}{9},$$

方向向下。

驗算

- 直接用拋射體運動計算：質點在高度 $r + r\cos\theta = \frac{5}{3}r$ 處離開，向下的鉛直速率為 $v\sin\theta$，其中 $\sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$，所以 $(v\sin\theta)^2 = \frac{10}{27}gr$。再下墮 $\frac{5}{3}r$ 會增加 $2g \cdot \frac{5}{3}r = \frac{90}{27}gr$，再次得到 $V_y^2 = \frac{100}{27}gr$。
- $V_y^2 = \frac{100}{27}gr \approx 3.70gr$ 比 $V^2 = 4gr$ 略小，這是必然的，因為有少量能量留在水平運動之中。
- 以數值方法逐步模擬運動（取 $g = 9.81$、$r = 1.3$、$m = 2$），得出在 48.19° 處離開球面，鉛直動量為 13.745，與 $\frac{10m\sqrt{3gr}}{9}$ 吻合；軌跡一直留在球體之外。

常見錯誤

- 由地面而非由球頂量度下降高度：在球面上，下降的高度是 $r(1-\cos\theta)$。
- 忘記離開球面後水平速度固定不變，誤把 $V_y^2 = 4gr$ 寫出來，彷彿全部動能都屬於鉛直方向。
- 誤以為速度與水平線成角 $90° - \theta$；那是半徑的角度，而非切線的角度。

STEP 之外

「反作用力消失時便離開接觸面」這個條件，是約束力(constraint force)的第一個例子：約束力會自行調節，使質點留在某個曲面上，而且只能推、不能拉。在拉格朗日力學（Lagrangian mechanics）中，這類約束從一開始便納入方程，而反作用力則以拉格朗日乘數（Lagrange multiplier）的形式出現。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）是在更高層次上練習圓周運動和能量方法的絕佳教材。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。