詳細解答

STEP I 1987，第 10 題

力學 • 彈性繩

> **STEP I 1987，第 10 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/87-s1-q10

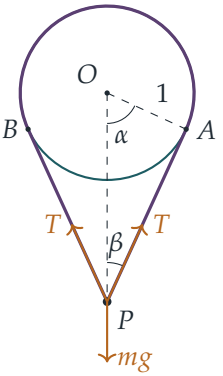
關鍵思路

質點把橡皮圈的底部從圓柱上拉下來，因此橡皮圈分成兩部分：一段仍然緊貼圓柱上方的圓弧，以及兩段直線部分；這兩段直線沿切線（*tangent*）離開圓柱，並在質點處相交。拉伸後的長度純粹是幾何問題：利用直角三角形，可以求出直線部分的長度，以及它們在軸上所對的角。由於圓柱是光滑（smooth）的，橡皮圈各處的張力（tension）都相同；在質點處分解力，就能把這張力與 mg 聯繫起來，再用胡克定律（Hooke's law）便可求出 λ。

解答

模型

我們把橡皮圈視為一條自然長度（natural length）為 2π、遵從胡克定律的輕彈性繩，圓柱視為光滑，質點視為點質量。我們在一個豎直橫截面上分析：圓柱是一個單位圓，圓心 O 在軸上；質點位於 P，在 O 豎直下方距離 x 處。橡皮圈要離開圓柱，必須有 $x > 1$。



由於圖形關於通過 O 的豎直線對稱，橡皮圈在兩點 A 和 B 離開圓柱，兩邊各一點。一條拉緊的繩離開光滑曲線時，是沿切線離開的，因此 PA 在 A 點與圓相切，即 $OA \perp AP$。設 $\alpha = \angle AOP$，$\beta = \angle APO$。

拉伸後的長度

三角形 OAP 在 A 處是直角，$OA = 1$，斜邊 $OP = x$。因此

$$AP = \sqrt{x^2 - 1}, \qquad \cos\alpha = \frac{1}{x}, \qquad \sin\beta = \frac{1}{x}.$$

除了經底部從 A 到 B 的一段（在 O 處所對的角為 2α）之外，橡皮圈處處與圓柱接觸。所以接觸部分的圓弧所對的角是 $2\pi - 2\alpha$，在單位圓上其長度就是 $2\pi - 2\alpha$。加上兩段直線部分，拉伸後的長度為

$$\boxed{L = 2\sqrt{x^2 - 1} + 2\pi - 2\arccos\frac{1}{x}}$$

其中由於 $x > 1$，$\arccos(1/x)$ 介於 0 與 $\frac{\pi}{2}$ 之間。因此伸長量（extension）為

$$L - 2\pi = 2\sqrt{x^2 - 1} - 2\arccos\frac{1}{x}.$$

? **想一想** 橡皮圈繞着圓柱彎曲。為甚麼直線部分的張力與圓弧部分的張力相同？

對於與光滑表面接觸的一小段橡皮圈，圓柱施加的力只有垂直於表面的法向力，因此沒有任何力可以抵消沿橡皮圈方向的張力變化。所以張力 T 在整條橡皮圈上都是常數，胡克定律可以應用於整條橡皮圈：

$$T = \frac{\lambda\,(L - 2\pi)}{2\pi}.$$

（如果圓柱是粗糙的，張力在圓弧上就可能有變化，這一步便不成立。）

質點的平衡

作用在質點上的力有重量 mg，以及沿 PA 和 PB 方向的張力 T，兩者與向上豎直方向的夾角均為 β。由對稱性，水平分量互相抵消。豎直方向分解，

$$2T\cos\beta = mg, \qquad \text{其中} \qquad \cos\beta = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x},$$

所以

$$T = \frac{mgx}{2\sqrt{x^2-1}}.$$

$x = 2$ 的情況

此時 $\cos\alpha = \frac{1}{2}$，故 $\alpha = \frac{\pi}{3}$，且 $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{3}$。拉伸後的長度為

$$L = 2\sqrt{3} + 2\pi - \frac{2\pi}{3} = 2\sqrt{3} + \frac{4\pi}{3}, \qquad \text{所以} \qquad L - 2\pi = 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}.$$

張力為 $T = \dfrac{2mg}{2\sqrt{3}} = \dfrac{mg}{\sqrt{3}}$。由胡克定律得

$$\lambda = \frac{2\pi T}{L-2\pi} = \frac{2\pi mg/\sqrt{3}}{2\sqrt{3} - 2\pi/3} = \frac{2\pi mg}{6 - 2\pi/\sqrt{3}} = \frac{\pi mg}{3 - \pi/\sqrt{3}},$$

分子分母同乘以 $\sqrt{3}$，

$$\boxed{\lambda = \frac{\sqrt{3}\,\pi\, mg}{3\sqrt{3} - \pi} \approx 2.65\, mg.}$$

驗算

- 當 $x \to 1^+$ 時，$\arccos(1/x) \to 0$ 且 $\sqrt{x^2-1} \to 0$，所以 $L \to 2\pi$：橡皮圈剛好碰到圓柱底部而沒有被拉伸，這正合理。同時 $T \to \infty$，這與以下事實吻合：兩條接近水平的繩子只有在張力極大時才能承托重物。
- 當 $x = 2$ 時，$L = 2\sqrt{3} + 4\pi/3 \approx 7.653$，比 $2\pi \approx 6.283$ 稍大；而 λ 與 mg 一樣具有力的單位。
- 另外，我們取 $\lambda \approx 2.6484\, mg$，以數值方法求總勢能$(\text{potential energy}) - mgx + \lambda(L - 2\pi)^2/(4\pi)$ 的最小值；最小值出現在 $x = 2$，這同時證實了幾何部分和張力部分的結果。

常見錯誤

- 把直線部分當作從 P 連到水平直徑的兩個端點。橡皮圈是沿切線離開的，所以它在軸的高度以下離開圓柱，位置與向下豎直方向成角 $\alpha = \arccos(1/x)$。

► 在胡克定律中只用一段直線部分的伸長量。張力是均勻的，所以應該用整條橡皮圈的伸長量 $L - 2\pi$，除以整條的自然長度 2π。

STEP 之外

「在光滑表面上張力處處相同」這一說法，是絞盤方程（capstan equation）在無摩擦情況下的特例：若摩擦系數（coefficient of friction）為 μ，繞過角度 θ 後，張力最多可以改變 $e^{\mu\theta}$ 倍。這就是為甚麼一條在柱上繞幾圈的繩子能夠繫住一艘船。上面的能量驗算，也讓你初步領略力學的變分觀點（variational view）：平衡位置就是勢能的駐點（stationary point）。若想看大學一年級程度、以這種思路處理力、摩擦和勢能的教材，可讀 Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。