詳細解答

STEP I 1987，第 1 題

純數學 • 曲線描繪

> **STEP I 1987，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/87-s1-q1

關鍵思路

用乘積法則（product rule）求導後，會剩下一個永不為零的因子 e^{ax}，乘以 $\cos bx$ 與 $\sin bx$ 的某個組合。因此駐點（stationary points）全部來自同一條方程 $\tan bx =$ 常數，而這條方程的解是等距分佈的，相鄰兩解相距 π/b。從一個駐點移到下一個，指數部分乘以一個固定的因子，而餘弦部分則變號，這正正就是一個等比數列（geometric progression）。

解答

駐點

由乘積法則，

$$\mathrm{f}'(x) = a\mathrm{e}^{ax}\cos bx - b\mathrm{e}^{ax}\sin bx = \mathrm{e}^{ax}(a\cos bx - b\sin bx).$$

由於對所有 x 都有 $\mathrm{e}^{ax} > 0$，所以 $\mathrm{f}'(x) = 0$ 當且僅當 $a\cos bx = b\sin bx$。

> ? **想一想** 這裏可以放心除以 $\cos bx$ 嗎？

可以。若 $\cos bx = 0$，則 $\sin bx = \pm 1$，方程便變成 $0 = \pm b$，但因為 $b > 0$，這是不成立的。所以在任何駐點上都有 $\cos bx \neq 0$，兩邊相除得

$$\tan bx = \frac{a}{b}.$$

設 $\alpha = \arctan(a/b)$。因為 $a/b > 0$，所以 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$。由於 tan 的週期（period）是 π，方程的解為 $bx = \alpha + n\pi$，因此駐點位於

$$x_n = \frac{\alpha + n\pi}{b}, \qquad n \in \mathbb{Z}, \qquad \text{其中 } \tan\alpha = \frac{a}{b}.$$

考慮兩條直角邊分別為 a 和 b 的直角三角形，可得 $\cos\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$。由於 $\cos(\theta + n\pi) = (-1)^n \cos\theta$，f 在該處的值為

$$\begin{aligned} \mathrm{f}(x_n) &= \mathrm{e}^{a(\alpha+n\pi)/b}\cos(\alpha+n\pi) \\ &= (-1)^n \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\mathrm{e}^{a\alpha/b}\,\mathrm{e}^{na\pi/b}. \end{aligned}$$

極大還是極小？ 再求導一次，

$$\mathrm{f}''(x) = \mathrm{e}^{ax}((a^2-b^2)\cos bx - 2ab\sin bx).$$

在駐點上 $b\sin bx = a\cos bx$，所以 $2ab\sin bx = 2a^2\cos bx$，於是

$$\mathrm{f}''(x_n) = \mathrm{e}^{ax_n}\cos bx_n\,(a^2-b^2-2a^2) = -(a^2+b^2)\,\mathrm{f}(x_n).$$

因此當 $\mathrm{f}(x_n) > 0$（n 為偶數）時，x_n 是極大點（maximum）；當 $\mathrm{f}(x_n) < 0$（n 為奇數）時，x_n 是極小點（minimum）。駐點交替出現：極大、極小、極大、...

等比數列

由於 $0 < \alpha < \pi$，$x_n > 0$ 當且僅當 $n \geq 0$。所以 $x > 0$ 的駐點是 $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots$，而對每個 $n \geq 0$，

$$\frac{\mathrm{f}(x_{n+1})}{\mathrm{f}(x_n)} = \frac{\mathrm{e}^{a(\alpha+(n+1)\pi)/b}\cos(\alpha+(n+1)\pi)}{\mathrm{e}^{a(\alpha+n\pi)/b}\cos(\alpha+n\pi)} = \mathrm{e}^{a\pi/b}\cdot(-1) = -\mathrm{e}^{a\pi/b},$$

這裏用到 $\cos(\theta+\pi) = -\cos\theta$ 及 $\cos(\alpha+n\pi) \neq 0$。這個比值與 n 無關，所以 $\mathrm{f}(x_0), \mathrm{f}(x_1), \ldots$ 組成一個等比數列，首項為 $\dfrac{b\,\mathrm{e}^{a\alpha/b}}{\sqrt{a^2+b^2}}$，公比（common ratio）為 $-\mathrm{e}^{a\pi/b}$，得證。

（同樣的計算對負數 n 亦成立，所以事實上所有駐值組成一個向兩邊無限延伸的等比數列。限制 $x > 0$ 只是給它一個自然的首項。）

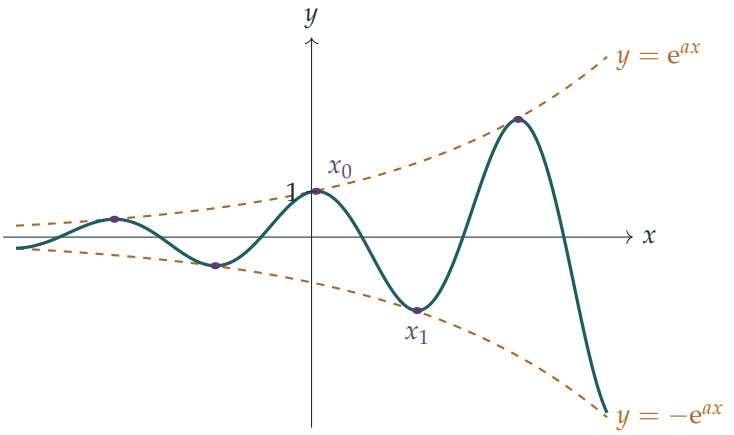
草圖

所需的事實：

- 由於 $-1 \leq \cos bx \leq 1$，圖像夾在曲線 $y = \mathrm{e}^{ax}$ 與 $y = -\mathrm{e}^{ax}$ 之間。在 $\cos bx = 1$（$bx = 2m\pi$）處，圖像與 $y = \mathrm{e}^{ax}$ 相接；在 $\cos bx = -1$（$bx = (2m+1)\pi$）處，則與 $y = -\mathrm{e}^{ax}$ 相接。在這些點上 $\sin bx = 0$，所以 $\mathrm{f}'(x) = \pm a\mathrm{e}^{ax}$，與包絡線（envelope）的斜率相同：曲線在該處與包絡線相切，而不是轉向。
- 零點位於 $bx = \frac{\pi}{2} + m\pi$，相鄰兩個相距 π/b，而且 $\mathrm{f}(0) = 1$。

- 每個轉向點（turning point）$bx = \alpha + n\pi$ 都位於對應的相接點 $bx = n\pi$ 稍後的位置，因為 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$：不斷上升的包絡線把每個峯頂稍稍拉向右方。
- 當 $x \to \infty$ 時，振盪幅度無界地增大；當 $x \to -\infty$ 時，$\mathrm{e}^{ax} \to 0$，所以 $\mathrm{f}(x) \to 0$，但仍然不斷振盪。

草圖所示為 $a = 0.3$、$b = 2$ 的情況，包絡線 $y = \pm\mathrm{e}^{ax}$ 以虛線表示。



驗算

- 取 $a = b = 1$：此時 $\alpha = \frac{\pi}{4}$，$x_0 = \frac{\pi}{4}$，$\mathrm{f}(x_0) = \mathrm{e}^{\pi/4}/\sqrt{2} \approx 1.551$，而 $\mathrm{f}(x_1) = \mathrm{e}^{5\pi/4}\cos\frac{5\pi}{4} \approx -35.89$。比值約為 $\approx -23.14 = -\mathrm{e}^{\pi}$。
- 當 $a \to 0$ 時，函數變成 $\cos bx$：$\alpha \to 0$，轉向點移到 $bx = n\pi$，比值趨向 -1，得出大家熟悉的 $1, -1, 1, \ldots$
- 我們以數值方法對 500 組隨機的 (a, b) 作驗證，確認了 $\mathrm{f}'(x_n) = 0$、$\mathrm{f}(x_n)$ 與上述公式相符、$\mathrm{f}''(x_n) = -(a^2 + b^2)\mathrm{f}(x_n)$、相鄰比值等於 $-\mathrm{e}^{a\pi/b}$，以及 f' 沒有其他零點。

常見錯誤

- 把轉向點放在曲線與包絡線相接之處，即 $bx = n\pi$。這些點的斜率是 $\pm a\mathrm{e}^{ax} \neq 0$；真正的轉向點稍稍偏右。
- 只取 $bx = \alpha$，忘記了 $\tan bx = a/b$ 的通解（general solution）$bx = \alpha + n\pi$。
- 漏掉比值中的負號：餘弦在相鄰兩個駐點之間變號，所以駐值交替為極大、極小。

STEP 之外

函數 $e^{ax}\cos bx$ 是 $e^{(a+ib)x}$ 的實部（real part），而這類函數正正就是那些輔助方程（auxiliary equation）有複數根的線性微分方程（linear differential equation）$y'' + py' + qy = 0$ 的解。當 $a < 0$ 時，得到的是阻尼振動（damped oscillation），例如有摩擦力的擺；當 $a > 0$ 時(如本題)，則是一個振盪不斷增大的不穩定系統。相鄰峯值之比是常數，而這個比值的對數就是工程師所說的對數衰減率（logarithmic decrement）。Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）在二階線性方程一章中詳細發展了這個題材；Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直觀複分析》）則說明了為甚麼乘以 $e^{(a+ib)x}$ 會描出一條螺線。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。