詳細解答

STEP III 2025，第 9 題

力學 • 質心

STEP III 2025，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2025 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

本題在 *Beyond STEP* 第 11.8 節傾斜的平衡中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch11/tilted-equilibria.html

關鍵思路

一個放在桌上的立體只在一點與桌面接觸，而且只受兩個力作用：作用於質心（centre of mass）G 的重量，以及作用於接觸點的反作用力（reaction）。這兩個力要互相平衡，必須作用在同一條鉛垂線上，所以曲面在接觸點的法線（normal）必須通過 G。第 (i) 部分找出 G 的位置，第 (ii) 部分告訴我們曲面的法線與軸相交於何處，第 (iii) 部分則把兩者結合起來：我們數一數曲面上有多少點的法線通過 G。

解答

全文中，把曲線寫成 $y = \dfrac{r^n - x^n}{r^{n-1}}$，其中 $0 \le x \le r$。它由 y 軸上的 $(0, r)$ 向下延伸至 x 軸上的 $(r, 0)$，期間 $y \ge 0$。

第 (i) 部分

我們把立體切成繞 y 軸的薄圓柱殼（cylindrical shells）。半徑為 x、厚度為 δx、高度為 y 的圓柱殼，體積為 $2\pi x y\,\delta x$；由於密度均勻，它的質心位於高度 $\frac{1}{2}y$ 處。因此體積及關於 xz 平面的力矩（moment）分別為

$$V = 2\pi \int_0^r xy \,\mathrm{d}x, \qquad V\bar{y} = 2\pi \int_0^r x \cdot \tfrac{1}{2}y^2 \,\mathrm{d}x.$$

第一個積分為

$$\int_0^r x\,\frac{r^n - x^n}{r^{n-1}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{r^{n-1}}\left(\frac{r^{n+2}}{2} - \frac{r^{n+2}}{n+2}\right) = \frac{n\,r^3}{2(n+2)},$$

所以 $V = \dfrac{\pi n r^3}{n+2}$。至於第二個積分，把 $(r^n - x^n)^2$ 展開：

$$\begin{aligned}\int_0^r x\,\frac{(r^n - x^n)^2}{r^{2n-2}}\,\mathrm{d}x &= \frac{r^{2n+2}}{r^{2n-2}}\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{n+2} + \frac{1}{2n+2}\right)\\ &= r^4 \cdot \frac{(n+2)^2 - 4(n+1)}{2(n+1)(n+2)} = \frac{n^2 r^4}{2(n+1)(n+2)},\end{aligned}$$

所以 $V\bar{y} = \pi \cdot \dfrac{n^2 r^4}{2(n+1)(n+2)}$。兩者相除，

$$\bar{y} = \frac{\pi n^2 r^4}{2(n+1)(n+2)} \cdot \frac{n+2}{\pi n r^3} = \frac{nr}{2(n+1)},$$

此即所求。由對稱性可知，質心位於 y 軸上。

第 (ii) 部分

求導得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{nx^{n-1}}{r^{n-1}}$，在 $x = rp$ 處其值為 $-np^{n-1}$。由於 $p > 0$，此值不為零，所以法線的斜率（gradient）為 $\dfrac{1}{np^{n-1}}$，方程為

$$y - r(1 - p^n) = \frac{x - rp}{np^{n-1}}.$$

代入 $x = 0$，

$$Y = r(1 - p^n) - \frac{rp}{np^{n-1}} = r\left(1 - p^n - \frac{1}{np^{n-2}}\right),$$

此即所求結果。

當 $n = 4$ 時，$Y(p) = r\left(1 - p^4 - \frac{1}{4}p^{-2}\right)$，且

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}p} = r\left(-4p^3 + \frac{1}{2p^3}\right) = \frac{r(1 - 8p^6)}{2p^3}.$$

想一想 我們怎樣知道這個駐點（stationary point）給出的是最大值，而不只是局部（local）最大值？

對於 $p > 0$，$\mathrm{d}Y/\mathrm{d}p$ 的正負號與 $1 - 8p^6$ 的相同：當 $p^6 < \frac{1}{8}$ 時為正，當 $p^6 > \frac{1}{8}$ 時為負。因此 Y 遞增至 $p^6 = \frac{1}{8}$，即 $p^2 = \frac{1}{2}$、$p = 1/\sqrt{2}$（它位於 $(0, 1]$ 內），之後遞減。所以這是整個區間上的最大值：

$$Y_{\max} = r\left(1 - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}\cdot 2\right) = \tfrac{1}{4}r.$$

第 (iii) 部分

兩個部分。 上邊界 $r^3y = r^4 - x^4$ 就是第 (i) 部分中 $n = 4$ 的曲線，所以上半部（$y = 0$ 以上）就是第 (i) 部分中 $n = 4$ 的立體。下邊界 $ry = -(r^2 - x^2)$ 是 $n = 2$ 的曲線 $ry = r^2 - x^2$ 關於 x 軸的反射，所以下半部就是倒轉過來的 $n = 2$ 立體。兩者在平面 $y = 0$ 上半徑為 r 的圓形邊緣相接。利用第 (i) 部分，即 $V = \pi nr^3/(n+2)$：

	體積	質心高度
上半部（$n = 4$）	$\frac{2}{3}\pi r^3$	$\frac{4r}{10} = \frac{2}{5}r$
下半部（$n = 2$，經反射）	$\frac{1}{2}\pi r^3$	$-\frac{2r}{6} = -\frac{1}{3}r$

取力矩（與之前一樣，假設密度均勻），

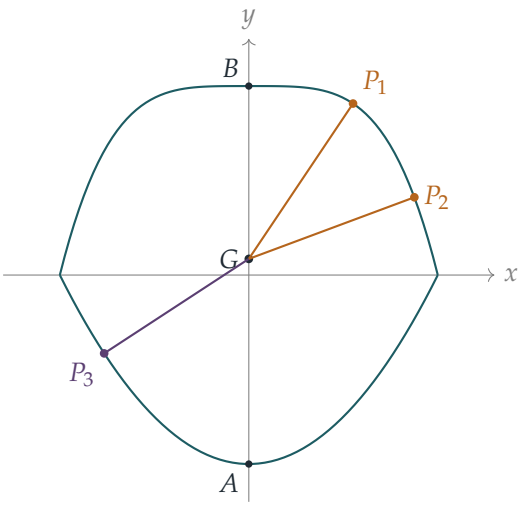
$$\bar{y} = \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}r - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}r}{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{10}r}{\frac{7}{6}} = \frac{3r}{35},$$

所以 $G = \left(0, \frac{3}{35}r\right)$，略高於邊緣。

平衡條件。

? **想一想** 為甚麼接觸點的法線必須通過 G？

當立體以單一點 P 靠在桌面上時，它只受兩個力：鉛垂地作用於 G 的重量，以及作用於 P 的桌面反作用力。兩個力要平衡，必須大小相等、方向相反並且作用在同一直線上，所以 G 必須位於 P 的正上方。桌面就是 P 處的切平面（tangent plane），所以通過 P 的鉛垂線就是立體在該點的法線：P 處的法線必須通過 G。反過來，若法線通過 G，立體便可以在該處靜止，因為立體是凸（convex）的（輪廓 $y = r - x^4/r^3$ 是凹（concave）的，而 $y = (x^2 - r^2)/r$ 是凸的），所以它完全位於 P 處切平面的同一側。旋轉曲面（surface of revolution）的法線位於一個通過軸的平面內，所以我們只需考慮 xy 平面上的截面。由於 G 在軸上，我們需要找出與 y 軸相交於 $Y = \frac{3}{35}r$ 的法線。



在上表面接觸。 由第 (ii) 部分取 $n=4$（而 $r(1-p^4)$ 是該點的高度），在 $\big(rp, r(1-p^4)\big)$ 處的法線與軸相交於 $r\big(1-p^4-\frac{1}{4}p^{-2}\big)$。令它等於 $\frac{3}{35}r$，再乘以 $140p^2$：

$$140p^2-140p^6-35=12p^2 \iff h(q):=140q^3-128q+35=0, \quad q=p^2.$$

由於 $h(0)=35>0$、$h(\frac{1}{2})=17.5-64+35=-11.5<0$ 及 $h(1)=47>0$，所以 h 有一個根 $q_1\in(0,\frac{1}{2})$ 及一個根 $q_2\in(\frac{1}{2},1)$，給出上表面上的兩點 P_1,P_2，其中 $0<p_1<1/\sqrt{2}<p_2<1$。（這正是第 (ii) 部分所預示的：$\frac{3}{35}r$ 低於最大值 $\frac{1}{4}r$，所以這個值在最大值兩側各達到一次。）

在下表面接觸。 對於 $n=2$ 的曲線，參數為 p 處的法線與軸相交於 $r(1-p^2-\frac{1}{2})=r(\frac{1}{2}-p^2)$；關於 x 軸反射後，下表面在 $\big(rp,-r(1-p^2)\big)$ 處的法線與軸相交於 $r(p^2-\frac{1}{2})$。令它等於 $\frac{3}{35}r$，得

$$p^2=\tfrac{1}{2}+\tfrac{3}{35}=\tfrac{41}{70}, \qquad p_3=\sqrt{41/70}\in(0,1),$$

這是第三點 P_3（由於我們所用的半截面上 $p>0$，所以取正根；圖中顯示的是它的鏡像，由對稱性可知兩者等價）。

三個角互不相同且不為零。 當立體在 P 處靜止時，向上的鉛垂方向由 P 指向 G，即沿 P 處的向內法線。

- 在下表面的 P_3 處，向內法線 $(-2p_3,1)$（曲線的斜率為 $2p_3$）指向上方，與指向正 y 軸方向的 $\overrightarrow{AB}$ 成銳角 $\arctan(2p_3)$。
- 在上表面的 P_1 或 P_2 處，向內法線 $(-4p^3,-1)$ 指向下方，所以與 $\overrightarrow{AB}$ 所成的角是鈍角 $180^\circ-\arctan(4p^3)$。

由於 $p_1 \neq p_2$ 且 $\arctan(4p^3)$ 嚴格遞增，兩個鈍角並不相同，而且兩者都與那個銳角不同。由於 $p_1, p_2, p_3 > 0$，三個角都不為零。因此立體可以在 $\overrightarrow{AB}$ 與向上鉛垂方向成三個不同的非零角時處於平衡（equilibrium），此即所求。

（事實上平衡位置不止這些：立體亦可以靠邊緣平衡，或以 B 點著地、$\overrightarrow{AB}$ 指向正下方而平衡。不過曲面上的這三個位置已足以回答題目。）

驗算

- 第 (i) 部分取 $n = 2$，對高度為 r 的拋物面（paraboloid）得出 $\frac{1}{3}r$，這是標準結果：實心拋物面的質心位於由頂點到底面的三分之二處。當 $n \to \infty$ 時，立體變成高度為 r 的圓柱體，而 $\bar{y} \to \frac{1}{2}r$，結果正確。
- 在第 (ii) 部分中，當 $p = 1$（邊緣）且 $n = 4$ 時得 $Y = -\frac{1}{4}r$；該處的斜率為 -4，所以法線的斜率為 $\frac{1}{4}$，在水平距離 r 內下降 $\frac{1}{4}r$。兩者吻合。
- 取 $r = 1$，各根為 $p_1 \approx 0.552$、$p_2 \approx 0.876$、$p_3 \approx 0.765$，而各角約為 146.1°、110.4° 及 56.8°。以電腦搜尋使 G 離桌面高度取駐值的傾角，在嚴格介乎 0° 與 180° 之間恰好找到這三個，另加邊緣的位置（約 85.1°）。

常見錯誤

- 把下半部的質心放在 $+\frac{1}{3}r$：它是倒轉過來的 $n = 2$ 立體，所以質心位於邊緣之下。
- 使用圓盤（disc）體積 $\pi x^2\,\delta y$，而 x 仍要以 y 的 $\frac{2}{n}$ 次方表示：這方法可行，但圓柱殼法得出的是多項式積分。
- 求得關於 $q = p^2$ 的三次方程，卻沒有證明它有兩個滿足 $0 < p < 1$ 的根；在 $q = 0, \frac{1}{2}, 1$ 檢查正負號即可解決。

STEP 之外

法線通過 G 這個條件，使物體滾動時 G 的高度取駐值，而這個高度就是勢能（potential energy）。穩定（stable）位置是勢能的極小值，不穩定位置則是極大值。光滑的凸體必定至少有兩個平衡位置，而 2006 年發現的「Gömböc」是一個只有一個穩定位置和一個不穩定位置的凸形體。關於勢能與穩定性的一般理論，可參閱 Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。