詳細解答

STEP III 2025，第 8 題

純數學 • 以複數求三角函數之和

STEP III 2025，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2025 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

關鍵思路

第 (i) 部分的恆等式(identity)其實是一條遞推關係(recurrence)：它把 $z^{m+1}-z^{-(m+1)}$ 用低兩級的同類表達式寫出來，因此反覆應用它，就能令一個和式逐項相消（telescope）。取 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 後，每個 $z^k \pm z^{-k}$ 都變成 $2\cos k\theta$ 或 $2\mathrm{i}\sin k\theta$，代數運算於是化為三角恆等式（trigonometric identity）。至於數值部分，關鍵在於選取 θ，使 $\sin 2n\theta$ 等於 $\sin\theta$（或 $\cos\theta$），從而可以約去。

解答

第 (i) 部分

展開乘積，得

$$\left(z-\frac{1}{z}\right)\left(z^m+\frac{1}{z^m}\right)=z^{m+1}+z^{1-m}-z^{m-1}-z^{-(m+1)}.$$

加上 $z^{m-1}-z^{1-m}$，中間兩項便互相抵消，剩下 $z^{m+1}-z^{-(m+1)}$，這正是所求的恆等式。

歸納法（*induction*）。當 $n=1$ 時，命題為 $z^2-z^{-2}=(z-z^{-1})(z+z^{-1})$，即平方差（difference of two squares），故成立。假設命題對某個 $n\geq 1$ 成立。在恆等式中取 $m=2n+1$（於是 $m+1=2n+2$，$m-1=2n$），

$$\begin{aligned}
z^{2n+2}-\frac{1}{z^{2n+2}} &= \left(z-\frac{1}{z}\right)\left(z^{2n+1}+\frac{1}{z^{2n+1}}\right)+\left(z^{2n}-\frac{1}{z^{2n}}\right)\\
&= \left(z-\frac{1}{z}\right)\left(z^{2n+1}+\frac{1}{z^{2n+1}}\right)+\left(z-\frac{1}{z}\right)\sum_{r=1}^{n}\left(z^{2r-1}+\frac{1}{z^{2r-1}}\right)\\
&= \left(z-\frac{1}{z}\right)\sum_{r=1}^{n+1}\left(z^{2r-1}+\frac{1}{z^{2r-1}}\right),
\end{aligned}$$

這裏用了歸納假設（inductive hypothesis），而多出來的一項正是 $r = n+1$ 的那一項。所以結果對 $n+1$ 成立，由歸納法知對所有 $n \geq 1$ 成立。

$z + \frac{1}{z}$ 的版本。同樣地，

$$\left(z+\frac{1}{z}\right)\left(z^m - \frac{1}{z^m}\right) = z^{m+1} - z^{1-m} + z^{m-1} - z^{-(m+1)},$$

所以這次要減去 $z^{m-1} - z^{1-m}$：

$$z^{m+1} - \frac{1}{z^{m+1}} = \left(z+\frac{1}{z}\right)\left(z^m - \frac{1}{z^m}\right) - \left(z^{m-1} - \frac{1}{z^{m-1}}\right).$$

這個負號令我們每往下推一級時符號交替改變，因此我們斷言

$$z^{2n} - \frac{1}{z^{2n}} = \left(z+\frac{1}{z}\right)\sum_{r=1}^{n}(-1)^{n-r}\left(z^{2r-1} - \frac{1}{z^{2r-1}}\right).$$

當 $n = 1$ 時，這同樣是 $(z+z^{-1})(z-z^{-1})$。若命題對 n 成立，取 $m = 2n+1$ 的恆等式給出

$$z^{2n+2} - \frac{1}{z^{2n+2}} = \left(z+\frac{1}{z}\right)\left[\left(z^{2n+1} - \frac{1}{z^{2n+1}}\right) - \sum_{r=1}^{n}(-1)^{n-r}\left(z^{2r-1} - \frac{1}{z^{2r-1}}\right)\right],$$

由於 $-(-1)^{n-r} = (-1)^{n+1-r}$，而第一項正是 $r = n+1$ 的那一項，其符號為 $(-1)^0 = 1$，所以方括號內恰好是 $\sum_{r=1}^{n+1}(-1)^{n+1-r}(z^{2r-1} - z^{-(2r-1)})$。歸納法至此完成。逐項寫出來就是

$$z^{2n} - \frac{1}{z^{2n}} = \left(z+\frac{1}{z}\right)\left[\left(z^{2n-1} - \frac{1}{z^{2n-1}}\right) - \left(z^{2n-3} - \frac{1}{z^{2n-3}}\right) + \cdots \pm \left(z - \frac{1}{z}\right)\right].$$

第 (ii) 部分

(a) 取 $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，則 $z^k + z^{-k} = 2\cos k\theta$，$z^k - z^{-k} = 2\mathrm{i}\sin k\theta$。第 (i) 部分的第一個結果變成

$$2\mathrm{i}\sin 2n\theta = 2\mathrm{i}\sin\theta\sum_{r=1}^{n} 2\cos(2r-1)\theta,$$

兩邊除以 $2\mathrm{i}$，得 $\sin 2n\theta = 2\sin\theta\sum_{r=1}^{n}\cos(2r-1)\theta$，即為所求。

(b) 取 $n = 2$：$\sin 4\theta = 2\sin\theta(\cos\theta + \cos 3\theta)$。我們希望 $\sin 4\theta$ 等於 $\sin\theta$，而 $\theta = \frac{1}{5}\pi$ 正好做到，因為 $\sin\frac{4}{5}\pi = \sin(\pi - \frac{1}{5}\pi) = \sin\frac{1}{5}\pi$。由於 $\sin\frac{1}{5}\pi \neq 0$，可以兩邊除以它：

$$1 = 2(\cos\tfrac{1}{5}\pi + \cos\tfrac{3}{5}\pi).$$

又 $\cos\frac{3}{5}\pi = -\cos(\pi - \frac{3}{5}\pi) = -\cos\frac{2}{5}\pi$，所以 $\cos\frac{1}{5}\pi - \cos\frac{2}{5}\pi = \frac{1}{2}$，即 $\cos\frac{2}{5}\pi = \cos\frac{1}{5}\pi - \frac{1}{2}$。

(c) 取 $n=7$ 及 $\theta=\frac{1}{15}\pi$，同樣有 $\sin 14\theta=\sin(\pi-\theta)=\sin\theta\neq 0$，所以

$$\sum_{r=1}^{7}\cos\frac{(2r-1)\pi}{15}=\frac{1}{2}.$$

想一想 這裏的七個角都是 $\frac{1}{15}\pi$ 的奇數倍，但目標式中的卻是偶數倍。怎樣由前者過渡到後者？

對大於 $\frac{1}{2}\pi$ 的角使用 $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$，並留意 $\cos\frac{5}{15}\pi=\cos\frac{1}{3}\pi=\frac{1}{2}$ 及 $\cos\frac{3}{15}\pi=\cos\frac{1}{5}\pi$：

$$\cos\tfrac{9}{15}\pi=-\cos\tfrac{2}{5}\pi,\qquad \cos\tfrac{11}{15}\pi=-\cos\tfrac{4}{15}\pi,\qquad \cos\tfrac{13}{15}\pi=-\cos\tfrac{2}{15}\pi.$$

和式變成

$$\cos\tfrac{1}{15}\pi+\cos\tfrac{7}{15}\pi-\cos\tfrac{2}{15}\pi-\cos\tfrac{4}{15}\pi+\tfrac{1}{2}+(\cos\tfrac{1}{5}\pi-\cos\tfrac{2}{5}\pi)=\tfrac{1}{2}.$$

由 (b)，括號內的值是 $\frac{1}{2}$，所以

$$\cos\tfrac{2}{15}\pi+\cos\tfrac{4}{15}\pi-\cos\tfrac{7}{15}\pi-\cos\tfrac{1}{15}\pi=\tfrac{1}{2}.$$

最後，$-\cos\frac{7}{15}\pi=\cos(\pi-\frac{7}{15}\pi)=\cos\frac{8}{15}\pi$，而 $-\cos\frac{1}{15}\pi=\cos(\pi+\frac{1}{15}\pi)=\cos\frac{16}{15}\pi$，得

$$\cos\tfrac{2}{15}\pi+\cos\tfrac{4}{15}\pi+\cos\tfrac{8}{15}\pi+\cos\tfrac{16}{15}\pi=\tfrac{1}{2},$$

即為所求。

第 (iii) 部分

想一想 目標式是 θ 的奇數倍角的正弦的交錯和。第 (i) 部分哪一個結果正好產生這種形式？

是 $z+\frac{1}{z}$ 的版本。取 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，它變成

$$2\mathrm{i}\sin 2n\theta=2\cos\theta\sum_{r=1}^{n}(-1)^{n-r}\,2\mathrm{i}\sin(2r-1)\theta,$$

所以

$$\sin 2n\theta=2\cos\theta\sum_{r=1}^{n}(-1)^{n-r}\sin(2r-1)\theta.$$

取 $n=3$：

$$\sin 6\theta=2\cos\theta\,(\sin 5\theta-\sin 3\theta+\sin\theta).$$

現在我們希望 $\sin 6\theta=\cos\theta$，而 $\theta=\frac{1}{14}\pi$ 符合要求：$\sin\frac{6}{14}\pi=\cos(\frac{1}{2}\pi-\frac{6}{14}\pi)=\cos\frac{1}{14}\pi$，且其值不為零。兩邊除以它，得

$$\sin\tfrac{1}{14}\pi-\sin\tfrac{3}{14}\pi+\sin\tfrac{5}{14}\pi=\tfrac{1}{2}.$$

驗算

- 用簡單的數值測試恆等式：取 $z = 2$、$n = 2$，得 $16 - \frac{1}{16} = \frac{255}{16}$，而 $(2 - \frac{1}{2})(2 + \frac{1}{2} + 8 + \frac{1}{8}) = \frac{3}{2} \cdot \frac{85}{8} = \frac{255}{16}$，以及 $(2 + \frac{1}{2})(8 - \frac{1}{8} - 2 + \frac{1}{2}) = \frac{5}{2} \cdot \frac{51}{8} = \frac{255}{16}$。
- 以數值計算，$\cos\frac{2}{5}\pi = 0.309017\ldots$ 與 $\cos\frac{1}{5}\pi - \frac{1}{2} = 0.809017\ldots - 0.5$ 相符；這就是大家熟悉的 $\cos\frac{1}{5}\pi = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$、$\cos\frac{2}{5}\pi = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$。
- 用計算機計算，(ii)(c) 和 (iii) 中的和式都等於 0.500000。

常見錯誤

- 在 $z + \frac{1}{z}$ 的遞推關係中弄錯符號：較低的一項是被減去的，所以和式符號交替，而最高的一項 $z^{2n-1} - z^{-(2n-1)}$ 必須帶 $+$ 號。
- 除以 $\sin\theta$ 或 $\cos\theta$ 時，沒有指出它在所選的角度下不為零。
- 在 (ii)(c) 中，忘記 $\cos\frac{5}{15}\pi = \frac{1}{2}$，或忘記需要用 (b) 來消去剩下的一對項。

STEP 之外

當 $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 時，表達式 $z^k + z^{-k}$ 就是 $2\cos k\theta$；而像第 (i) 部分那樣的遞推關係，正是切比雪夫多項式（Chebyshev polynomials）所滿足的關係——這些多項式把 $\cos k\theta$ 和 $\sin k\theta / \sin\theta$ 表示成 $\cos\theta$ 的多項式。(ii)(c) 和 (iii) 中那些漂亮的和式源自單位根（roots of unity）：角 $\frac{2}{15}\pi, \frac{4}{15}\pi, \frac{8}{15}\pi, \frac{16}{15}\pi$ 是由反覆加倍產生的，這讓我們初步窺見高斯（Gauss）週期（Gauss periods）與伽羅瓦理論（Galois theory）。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直觀複分析》）是欣賞這種幾何的絕佳讀物。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。