詳細解答

STEP III 2025，第 7 題

純數學 • 反正切函數

> **STEP III 2025，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2025 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

關鍵思路

一切都取決於一個事實：$f(x)\,f(-x) = 1$，因為 $(\sqrt{x^2+1} - x)(\sqrt{x^2+1} + x) = 1$。再加上 $f(x) > 0$，便可把 $g(x) + g(-x)$ 化成熟悉的 $\tan^{-1} t + \tan^{-1}(1/t)$。至於 (c)，$\tan \frac{1}{2}\theta$ 是半角正切（half-angle tangent），配合 $\tan\theta = 1/x$，它可化簡為 $f(x)$。一旦知道 g 與 k 在 $x > 0$ 時相等，(e) 中的兩個積分便可藉對稱性聯繫起來。

解答

第 (i) 部分

當 $x \neq 0$ 時，有 $x^2 = |x|^2$，所以

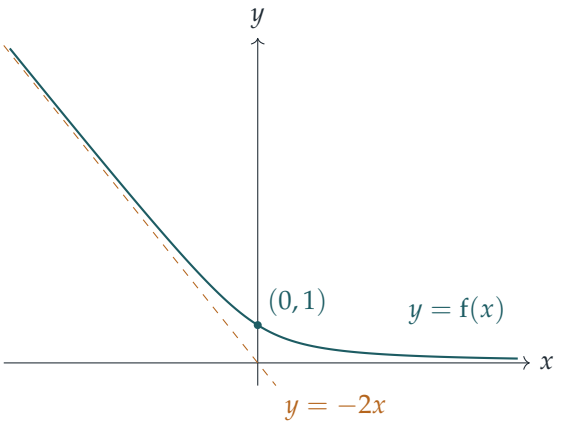
$$\sqrt{x^2+1} = |x|\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{1/2} = |x|\left(1 + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{8x^4} + \cdots\right) = |x| + \frac{1}{2|x|} - \frac{1}{8|x|^3} + \cdots,$$

這裏用了二項級數（binomial series）；由於 $|x|$ 很大時 $1/x^2 < 1$，展開是成立的。略去 $|x|^{-3}$ 階的項，便得 $\sqrt{x^2+1} \approx |x| + \dfrac{1}{2|x|}$，正如所求。

作圖。先整理各項事實。

- 對所有 x，$f(x) > 0$，因為 $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| \geq x$。此外 $f(0) = 1$。
- $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 < 0$，因為 $x < \sqrt{x^2+1}$，所以 f 是遞減（decreasing）的。再者 $f''(x) = (x^2+1)^{-3/2} > 0$，所以曲線是凸（convex）的。
- 當 $x \to +\infty$：$f(x) \approx x + \frac{1}{2x} - x = \frac{1}{2x} \to 0^+$，所以 x 軸是一條漸近線（asymptote）。

▶ 當 $x \to -\infty$：$|x| = -x$，所以 $\mathrm{f}(x) \approx -2x + \frac{1}{2|x|}$。直線 $y = -2x$ 是一條斜漸近線（oblique asymptote），而曲線位於它的稍上方。



第 (ii)(a) 部分

利用平方差（difference of two squares）展開，得

$$\mathrm{f}(x)\,\mathrm{f}(-x) = \left(\sqrt{x^2+1} - x\right)\left(\sqrt{x^2+1} + x\right) = (x^2+1) - x^2 = 1,$$

所以 $\mathrm{f}(-x) = 1/\mathrm{f}(x)$。設 $t = \mathrm{f}(x)$，由第 (i) 部分知它是正數。於是

$$\mathrm{g}(x) + \mathrm{g}(-x) = \tan^{-1} t + \tan^{-1}\frac{1}{t}.$$

? **想一想** 為甚麼 $\tan^{-1} t + \tan^{-1}(1/t) = \frac{1}{2}\pi$ 需要 $t > 0$？

設 $\alpha = \tan^{-1} t$。由於 $t > 0$，$\alpha \in (0, \frac{1}{2}\pi)$，所以 $\frac{1}{2}\pi - \alpha$ 也在 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 內，而這區間位於 $\tan^{-1}$ 的值域之內。它的正切是 $\cot\alpha = 1/t$，所以 $\tan^{-1}(1/t) = \frac{1}{2}\pi - \alpha$。由此得 $\mathrm{g}(x) + \mathrm{g}(-x) = \frac{1}{2}\pi$。（若 $t < 0$，總和便會是 $-\frac{1}{2}\pi$，這正是 f 為正這一點重要的原因。）

第 (ii)(b) 部分

$\tan^{-1}$ 是奇函數（odd function），所以當 $x \neq 0$ 時，

$$\mathrm{k}(-x) = \tfrac{1}{2}\tan^{-1}\left(-\frac{1}{x}\right) = -\tfrac{1}{2}\tan^{-1}\frac{1}{x} = -\mathrm{k}(x),$$

即 $\mathrm{k}(x) + \mathrm{k}(-x) = 0$。

第 (ii)(c) 部分

設 $x > 0$ 及 $\theta = \tan^{-1}(1/x)$，則 $\theta \in (0, \frac{1}{2}\pi)$ 且 $\mathrm{k}(x) = \frac{1}{2}\theta$。取一個對邊為 1、鄰邊為 x 的直角三角形，得 $\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ 及 $\cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$。利用半角恆等式（half-angle identity）$\tan\frac{1}{2}\theta = \dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$（由 $1-\cos\theta = 2\sin^2\frac{1}{2}\theta$ 及 $\sin\theta = 2\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta$ 得出），

$$\tan \mathrm{k}(x) = \frac{1 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}} = \sqrt{x^2+1} - x = \mathrm{f}(x) = \tan \mathrm{g}(x).$$

結果得證。

還可以說得更多。當 $x > 0$ 時，$\mathrm{k}(x) \in (0, \frac{1}{4}\pi)$。此外 $0 < \mathrm{f}(x) < \mathrm{f}(0) = 1$，所以 $\mathrm{g}(x) \in (0, \frac{1}{4}\pi)$ 亦成立。由於 tan 在該區間上是一一對應（one-to-one）的，

$$\mathrm{k}(x) = \mathrm{g}(x) \quad \text{當} x > 0.$$

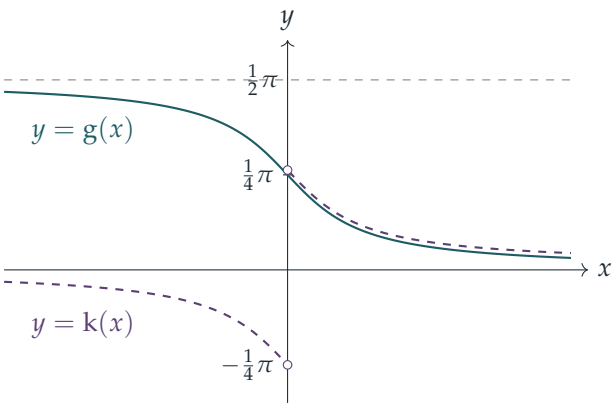
當 $x < 0$ 時，有 $-x > 0$，所以依次利用 (b)、上述結果及 (a)：

$$\mathrm{k}(x) = -\mathrm{k}(-x) = -\mathrm{g}(-x) = \mathrm{g}(x) - \tfrac{1}{2}\pi \quad \text{當} x < 0.$$

第 (ii)(d) 部分

$\mathrm{g} = \tan^{-1} \circ \mathrm{f}$ 是遞減的，因為 $\tan^{-1}$（遞增）與 f（遞減）都是單調（monotonic）的。當 $x \to -\infty$，$\mathrm{f} \to \infty$ 而 $\mathrm{g} \to \frac{1}{2}\pi$。當 $x \to +\infty$，$\mathrm{f} \to 0^+$ 而 $\mathrm{g} \to 0$。此外 $\mathrm{g}(0) = \tan^{-1} 1 = \frac{1}{4}\pi$，而由 (a) 可知圖像關於 $(0, \frac{1}{4}\pi)$ 具有旋轉對稱性（rotational symmetry）。

由 (c) 可知，當 $x > 0$ 時，k 的圖像與 g 的相同，從 $\frac{1}{4}\pi$（不能取得）下降至趨向 0。當 $x < 0$ 時，它是 g 的圖像向下平移 $\frac{1}{2}\pi$，從 0（當 $x \to -\infty$）下降，當 $x \to 0^-$ 時趨向 $-\frac{1}{4}\pi$。所以 k 是奇函數，並在 $x = 0$ 處（該處無定義）跳躍 $\frac{1}{2}\pi$。



（當 $x > 0$ 時兩條曲線重合。該處把虛線曲線畫得比實線稍高，只是為了讓兩者都看得見。）

第 (ii)(e) 部分

當 $x > 0$ 時，$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan^{-1}\dfrac{1}{x} = \dfrac{-1/x^2}{1+1/x^2} = -\dfrac{1}{1+x^2}$。使用分部積分（integration by parts），對 $\tan^{-1}(1/x)$ 求導，對 1 積分，

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mathrm{k}(x)\,\mathrm{d}x &= \tfrac{1}{2}\Big[x\tan^{-1}\frac{1}{x}\Big]_0^1 + \tfrac{1}{2}\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{4}\Big[\ln(1+x^2)\Big]_0^1 = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\ln 2.\end{aligned}$$

在下限處，當 $x \to 0^+$ 時 $x\tan^{-1}(1/x) \to 0$，因為 $\tan^{-1}(1/x)$ 一直小於 $\frac{1}{2}\pi$。（被積函數有界，所以這個積分完全是正常積分。）

由此。由 (c)，當 $-1 \le x < 0$ 時 $\mathrm{g}(x) = \mathrm{k}(x) + \frac{1}{2}\pi$。由 (b)，k 是奇函數，所以 $\int_{-1}^0 \mathrm{k}(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 \mathrm{k}(x)\,\mathrm{d}x$。因此

$$\int_{-1}^0 \mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\pi - \Big(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\ln 2\Big) = \frac{3\pi}{8} - \frac{1}{4}\ln 2.$$

驗算

- 在 $[-1,0]$ 上，g 由 $\mathrm{g}(-1) = \tan^{-1}(\sqrt{2}+1) = \frac{3}{8}\pi \approx 1.178$ 遞減至 $\frac{1}{4}\pi \approx 0.785$，所以積分必定介乎這兩個值之間。我們的答案是 $\frac{3}{8}\pi - \frac{1}{4}\ln 2 \approx 1.0048$，而數值積分（numerical quadrature）在十位小數內給出相同結果。同樣地，$\int_0^1 \mathrm{k}\,\mathrm{d}x \approx 0.56599$。
- 求導得 $\mathrm{g}'(x) = -\dfrac{1}{2(1+x^2)}$，所以其實 $\mathrm{g}(x) = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\tan^{-1}x$。這條公式令 (a) 一目了然，而直接對它積分亦可重現 (e) 的答案。
- 在 $x = 1$：$\mathrm{f}(1) = \sqrt{2}-1 = \tan\frac{1}{8}\pi$，而 $\mathrm{k}(1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{8}\pi$，與 (c) 的預測一致。

常見錯誤

- 對所有很大的 $|x|$ 都寫 $\sqrt{x^2+1} \approx x + \frac{1}{2x}$。對負數 x 而言這個式子符號錯誤，而且會掩蓋漸近線 $y = -2x$。
- 從 (c) 推斷 $\mathrm{k} = \mathrm{g}$ 處處成立。正切相等只能推出角度在相差 π 的倍數下相等，而當 $x < 0$ 時兩個函數相差 $\frac{1}{2}\pi$。
- 在分部積分中忘記論證 $x\tan^{-1}(1/x)$ 在 0 處的極限。

STEP 之外

函數 f 就是 $e^{-\sinh^{-1}x}$，因為 $\sinh^{-1}x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$。它的倒數性質 $f(-x) = 1/f(x)$ 不過是 $\sinh^{-1}$ 為奇函數這一點。(c) 中的陷阱——正切相等並不迫使角度相等——正是反函數分支（branch）問題的實變數版本。這個問題在複對數（complex logarithm）與輻角（argument）中會以更嚴重的形式再次出現。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直觀複分析》）是欣賞這一點的絕佳讀物，而 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）則仔細處理了極限與反常積分（improper integral）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。