詳細解答

STEP III 2025，第 6 題

純數學 • 根的對稱函數

STEP III 2025，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2025 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

關鍵思路

關於 $a+b+c$、$a^2+b^2+c^2$ 和 $a^3+b^3+c^3$ 的條件，實際上就是關於初等對稱函數（elementary symmetric functions）$a+b+c$、$ab+bc+ca$ 和 abc 的條件。一旦轉換過來，在 (i) 中這些數會成為一個非常簡單的多項式（polynomial）的根；在 (ii) 和 (iii) 中則由一個經典的因式分解（factorisation）包辦所有工作。最後一部分就是把同樣的代數倒過來運用。

解答

第 (i) 部分

將 $a+b+c=0$ 兩邊平方，得

$$0=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=2(ab+bc+ca),$$

所以同樣有 $ab+bc+ca=0$。

並非全是實數。若 a、b 和 c 全是實數，則 a^2、b^2、c^2 是總和為 0 的非負實數，迫使 $a=b=c=0$。這與這些數非零矛盾，所以它們不可能全是實數。

模相等。設 $p=abc$，它非零。由於 $a+b+c=0$ 且 $ab+bc+ca=0$，

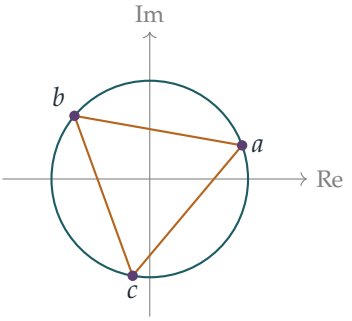
$$(z-a)(z-b)(z-c)=z^3-(a+b+c)z^2+(ab+bc+ca)z-abc=z^3-p.$$

所以 a、b、c 每一個都是 $z^3=p$ 的根，即

$$a^3=b^3=c^3=p.$$

取模（modulus），得 $|a|^3 = |b|^3 = |c|^3 = |p|$；由於模是非負實數，$|a| = |b| = |c| = |p|^{1/3}$。所以 a、b 和 c 的模全都相同，得證。

事實上，a、b、c 正是 p 的三個立方根（cube roots），它們位於一個以原點為中心的等邊三角形（equilateral triangle）的頂點上。



第 (ii) 部分

設 $a + b + c = 0$。則 $c = -(a + b)$，且

$$a^3 + b^3 + c^3 = a^3 + b^3 - (a + b)^3 = -3a^2b - 3ab^2 = -3ab(a + b) = 3abc.$$

若同時有 $a^3 + b^3 + c^3 = 0$，則 $abc = 0$，所以其中至少一個數為零。因此不存在三個同時具備這兩個性質的非零複數。

第 (iii) 部分

這次有用的恆等式（identity）是

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(c + a),$$

可以透過展開來驗證：兩邊的 a^2b、ab^2 等項各出現三次，而 abc 出現六次。

現在 $d = -(a + b + c)$，所以 $d^3 = -(a + b + c)^3$，且

$$0 = a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = a^3 + b^3 + c^3 - (a + b + c)^3 = -3(a + b)(b + c)(c + a).$$

想一想 為甚麼一個乘積等於零，能告訴我們關於模的任何資訊？

若干複數的乘積為零，當且僅當其中一個因子為零。所以 $a + b$、$b + c$、$c + a$ 之中有一個等於零；不妨設 $a + b = 0$（其他情況只需重新標記字母，做法相同）。於是 $b = -a$，所以 $|b| = |a|$。因此四個數中至少有兩個模相同。

（這裏並沒有用到 $d \neq 0$ 或這些數非零；結論其實就是這四個數可分成兩對互為相反數的數，例如 $a, -a, c, -c$。）

第 (iv) 部分

取 $c=1$、$d=-2$、$e=3$，有

$$c+d+e=2, \qquad c^3+d^3+e^3=1-8+27=20,$$

所以我們需要實數 a、b 使得

$$a+b=-2, \qquad a^3+b^3=-20.$$

利用 $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$，第二個條件變成

$$-20=-8+6ab \quad \Longrightarrow \quad ab=-2.$$

所以 a 和 b 是 $t^2+2t-2=0$ 的根，即

$$a=-1+\sqrt{3}, \qquad b=-1-\sqrt{3},$$

由於判別式（discriminant）$4+8=12$ 為正，它們都是實數。它們的絕對值分別是 $\sqrt{3}-1\approx 0.73$ 和 $\sqrt{3}+1\approx 2.73$，兩者都不等於 1、2 或 3（兩者都是無理數（irrational））。所以

$$-1+\sqrt{3}, \quad -1-\sqrt{3}, \quad 1, \quad -2, \quad 3$$

是五個絕對值各不相同的實數，總和為 0，而它們的立方和也是 0。

驗算

- 在 (i) 中，1 的立方根 1、ω、ω^2 滿足 $1+\omega+\omega^2=0$ 及 $1+\omega^2+\omega^4=1+\omega^2+\omega=0$：模全是 1，且並非全是實數，與預期相符。
- 在 (iii) 中，試取 $a=2$、$b=-2$、$c=\mathrm{i}$、$d=-\mathrm{i}$：兩個和都等於零，而這些數確實兩兩配成相反數。
- 在 (iv) 中，以數值計算得 $0.7320-2.7320+1-2+3=0$ 及 $0.3923-20.3923+1-8+27=0$，其中用到 $(\sqrt{3}-1)^3=6\sqrt{3}-10$ 和 $(-1-\sqrt{3})^3=-6\sqrt{3}-10$。

常見錯誤

- 在 (i) 中，透過「取立方根」由 $a^3=b^3$ 推出 $|a|=|b|$：a 和 b 不一定相等，但它們的模相等，因為模是非負實數。
- 在 (iii) 中，忘記說明爲甚麼 $(a+b)(b+c)(c+a)=0$ 迫使其中一個因子為零（因為 $\mathbb{C}$ 中沒有零因子（zero divisors））。
- 在 (iv) 中，沒有檢查 a 和 b 的絕對值與 1、2、3 不同，以及兩者彼此不同。

STEP 之外

每個多變量對稱多項式（symmetric polynomial）都可以用初等對稱多項式表示，而牛頓（Newton）恆等式（Newton's identities）則明確給出它們與冪和（power sums）$a^k + b^k + c^k + \ldots$ 之間的聯繫；這正是這裏的條件能把這些數限制得如此緊的原因。一個近親是 Prouhet–Tarry–Escott 問題：找出兩組不同的整數，使它們的一次方、二次方、...、k 次方之和全部相等。這個問題至今仍部分未解決。關於多項式及其根的代數，可參閱 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《環、域與羣》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。