詳細解答

STEP III 2025，第 5 題

純數學 • 三維向量

STEP III 2025，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2025 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

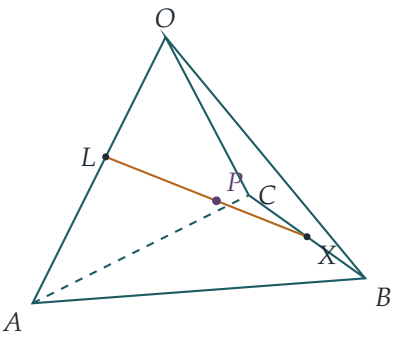
www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

關鍵思路

由於 O 位於不共線（non-collinear）三點 A、B、C 所在平面的上方，向量 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$ 是線性獨立（linearly independent）的，因此在任何以它們表示的向量方程中，我們都可以比較係數（compare coefficients）。題中每一點都可以先用未知參數寫出，再透過對應係數求得。點在平面上方的高度只是係數的倍數，因此處理「水平」這個條件就變得十分容易。

解答

由於 O 不在平面 ABC 上，$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 之中沒有任何一個是其餘兩個的組合（例如若 $\mathbf{c} = p\mathbf{a} + q\mathbf{b}$，則 O、A、B、C 便會共面（coplanar））。所以 $x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c} = x'\mathbf{a} + y'\mathbf{b} + z'\mathbf{c}$ 必然推出 $x = x'$、$y = y'$、$z = z'$。另外亦須留意 $k > 0$。



第 (i) 部分

設 $\overrightarrow{OL} = \lambda\mathbf{a}$ 及 $\overrightarrow{OX} = (1-t)\mathbf{b} + t\mathbf{c}$。由於 P 在 LX 上，存在某個 s 使得

$$\overrightarrow{OP} = (1-s)\lambda\,\mathbf{a} + s(1-t)\,\mathbf{b} + st\,\mathbf{c}.$$

與 $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$ 比較：

$$(1-s)\lambda = \alpha, \qquad s(1-t) = \beta, \qquad st = \gamma.$$

將後兩式相加得 $s = \beta + \gamma$，於是 $t = \gamma/(\beta+\gamma)$，所以

$$\overrightarrow{OX} = \frac{\beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}}{\beta+\gamma}.$$

最後 $1 - s = 1 - \beta - \gamma = k + \alpha$，這是正數，所以

$$\overrightarrow{OL} = \frac{\alpha}{1-s}\,\mathbf{a} = \frac{\alpha}{k+\alpha}\,\mathbf{a},$$

正如所求。（各係數都是被唯一確定的，所以 L 和 X 是唯一的；又由於 $0 < s < 1$ 及 $0 < t < 1$，P 嚴格位於 L 與 X 之間，而 X 嚴格位於 B 與 C 之間。）

第 (ii) 部分

把字母輪換（$\mathbf{a} \to \mathbf{b} \to \mathbf{c} \to \mathbf{a}$，$\alpha \to \beta \to \gamma \to \alpha$），以同樣的論證可得

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\beta}{k+\beta}\mathbf{b}, \quad \overrightarrow{ON} = \frac{\gamma}{k+\gamma}\mathbf{c}, \quad \overrightarrow{OY} = \frac{\gamma\mathbf{c} + \alpha\mathbf{a}}{\gamma+\alpha}, \quad \overrightarrow{OZ} = \frac{\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}}{\alpha+\beta}.$$

想一想 怎樣判斷一個經過三個給定點的平面是否水平？

當且僅當（if and only if）三點處於同一高度時，該平面才是水平的。設 O 位於平面 ABC 上方高度 $h > 0$ 處。那麼 A、B、C 各自都在 O 下方鉛垂距離 h 處，因此 OA 上的點 $\mu\mathbf{a}$ 位於 O 下方距離 μh 處，OB 和 OC 上的點亦同理。所以 L、M、N（它們位於三條不同的棱上且不在 O 處，故不共線）分別位於 O 下方深度

$$\frac{\alpha h}{k+\alpha}, \qquad \frac{\beta h}{k+\beta}, \qquad \frac{\gamma h}{k+\gamma}$$

處。現在

$$\frac{\alpha}{k+\alpha} = \frac{\beta}{k+\beta} \iff \alpha k + \alpha\beta = \beta k + \alpha\beta \iff k(\alpha-\beta) = 0 \iff \alpha = \beta,$$

這裏用到 $k > 0$。其餘各對同理，所以

$$\text{平面}LMN \text{ 是水平的} \iff \alpha = \beta = \gamma.$$

接着，OP 與平面 ABC 相交於何處？點 $x\mathbf{a}+y\mathbf{b}+z\mathbf{c}$ 位於該平面上，當且僅當 $x+y+z=1$（此時它等於 $\mathbf{a}+y(\mathbf{b}-\mathbf{a})+z(\mathbf{c}-\mathbf{a})$，而平面上每一點都具有這個形式）。點 $\mu\overrightarrow{OP}$ 的係數之和為 $\mu(\alpha+\beta+\gamma)$，所以直線 OP 與該平面相交於

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c}}{\alpha+\beta+\gamma}.$$

比較係數可知，它等於 $\frac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$ 當且僅當

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{1}{3},$$

即當且僅當 $\alpha=\beta=\gamma$。兩個條件都等價於 $\alpha=\beta=\gamma$，所以平面 LMN 是水平的，當且僅當 OP 與平面 ABC 相交於三角形 ABC 的形心（centroid）G。至此完成題目要求的「證明」。

在這情況下 $\overrightarrow{OX}=\frac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c})$，$Y$ 和 Z 亦同理：點 X、Y、Z 分別是 BC、CA 和 AB 的**中點**。

第 (iii) 部分

我們可以寫成

$$\overrightarrow{OP}=k\,\mathbf{0}+\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c},\qquad k+\alpha+\beta+\gamma=1,$$

而正正因為 $\alpha+\beta+\gamma<1$，四個權重 k,α,β,γ 全都是正數。所以 P 是 O、A、B、C 以嚴格正權重所作的加權平均（weighted average），這表示 P 嚴格位於四面體（tetrahedron）$OABC$ 的**內部**。

換個說法：單憑 α、β、γ 為正，就已把 P 置於以 O 為頂點、由棱 OA、OB、OC 張成的無限三面錐之內。P 在 O 下方的深度是 $(\alpha+\beta+\gamma)h$，所以條件 $\alpha+\beta+\gamma<1$ 表示 P 位於平面 ABC 上方，與 O 在同一側。（若和等於 1，P 便在面 ABC 上；若大於 1，則在其另一側。）

驗算

- 取 $\alpha=\beta=\gamma=\frac{1}{4}$，於是 $k=\frac{1}{4}$：那麼 $\overrightarrow{OL}=\frac{1}{2}\mathbf{a}$、$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\mathbf{b}$、$\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}\mathbf{c}$，而 LMN 顯然就是水平的中截面，與第 (ii) 部分的預測一致。
- 當 $k\to 0$（即 P 趨近面 ABC）時，$\overrightarrow{OL}\to\mathbf{a}$：$L$ 向下移至 A，這是合理的，因為此時 L、P、X 全都位於平面 ABC 上。
- 以電腦對 2000 個隨機四面體及隨機的 α,β,γ 進行驗算，確認 P 在 LX 上（殘差約為 10^{-15}），並且 LMN 是水平的恰好當 G 是形心之時。

常見錯誤

- 比較係數時沒有說明為何可以這樣做：這需要 **a**、**b**、**c** 線性獨立，而這正是用到「O 位於平面上方」的地方。
- 忘記在 $k(\alpha-\beta)=0$ 中消去 k 需要 $k>0$。
- 只證明了「當且僅當」的其中一個方向。

STEP 之外

數組 (k,α,β,γ) 就是 P 相對於四面體 $OABC$ 的重心坐標（barycentric coordinates）：一點位於內部，當且僅當所有坐標皆為正數；位於某個面上，則恰有一個坐標為零。它們是仿射幾何（affine geometry）的自然坐標，在線性代數（linear algebra）中（仿射組合與凸包（convex hulls））以及電腦圖像學中都會再次出現——在電腦圖像學裏，三角形正是以重心權重插值來著色的。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）是了解線性獨立和坐標如何以這種方式運用的好去處。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。