詳細解答

STEP III 2025，第 4 題

純數學 • 曲線的變換

STEP III 2025，第 4 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2025 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

關鍵思路

設平面上的映射 T 有逆映射（inverse）。那麼曲線 $f(T^{-1}(x,y)) = 0$ 就是曲線 $f(x,y) = 0$ 在 T 之下的像，因為一點在新曲線上，當且僅當 T^{-1} 把它送到舊曲線上。第 (i) 部分就旋轉（rotation）的情況證明這一點。第 (ii) 部分對反射（reflection）做同樣的事，此時 $T^{-1} = T$。在第 (iii) 部分，我們留意到代換（substitution）$u = x - 2y$ 把方程變成 $y = \sin x$ 的一個水平剪切（horizontal shear），再用參數化（parametrisation）便能求出切線（tangent），完全免去隱函數微分（implicit differentiation）的麻煩。

解答

第 (i) 部分

把矩陣乘積展開，得

$$x_2 = \frac{x_1 - y_1}{\sqrt{2}}, \qquad y_2 = \frac{x_1 + y_1}{\sqrt{2}}.$$

把 $(x,y) = (x_2, y_2)$ 代入 G_2 方程中的兩個括號：

$$\frac{x_2}{\sqrt{2}} + \frac{y_2}{\sqrt{2}} = \frac{(x_1 - y_1) + (x_1 + y_1)}{2} = x_1,$$
$$-\frac{x_2}{\sqrt{2}} + \frac{y_2}{\sqrt{2}} = \frac{-(x_1 - y_1) + (x_1 + y_1)}{2} = y_1.$$

所以 G_2 的方程左邊在 (x_2, y_2) 的值是 $\frac{x_1^2}{9} + \frac{y_1^2}{4}$。由於 (x_1, y_1) 在 G_1 上，這個值等於 1。因此 (x_2, y_2) 在 G_2 上。

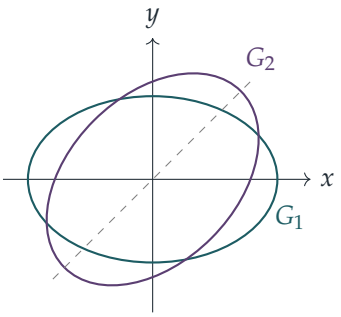
至於旋轉，留意 $\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos 45^\circ = \sin 45^\circ$，所以矩陣是

$$R = \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix},$$

即繞原點逆時針旋轉 45°。我們剛剛證明了 R 把 G_1 上每一點都映射到 G_2 上。要證明 G_2 恰好就是旋轉後的曲線，我們還需要 G_2 上每一點都來自 G_1。取 G_2 上任意一點 (x, y)，並設

$$x_1 = \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}}, \qquad y_1 = -\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}},$$

這就是 $R^{-1}(x, y)$（反方向轉回 45°）。G_2 的方程正好說明 $\frac{x_1^2}{9} + \frac{y_1^2}{4} = 1$，所以 $(x_1, y_1) \in G_1$，而且 $R(x_1, y_1) = (x, y)$。因此 $G_2 = R(G_1)$：橢圓（ellipse）G_2 就是把 G_1 繞原點逆時針旋轉 45° 所得的曲線。



第 (ii)(a) 部分

把該矩陣記作 M。點 (x, y) 是不變點（invariant point），當且僅當 $M\binom{x}{y} = \binom{x}{y}$，即

$$-0.6x + 0.8y = x, \qquad 0.8x + 0.6y = y.$$

第一式給出 $0.8y = 1.6x$，所以 $y = 2x$；第二式給出 $0.8x = 0.4y$，兩者其實一樣。所以不變點所成的直線（即鏡線（mirror line））是

$$y = 2x.$$

第 (ii)(b) 部分

記 $(X, Y) = M(x, y) = (-0.6x + 0.8y,\ 0.8x + 0.6y)$。第二條方程正是

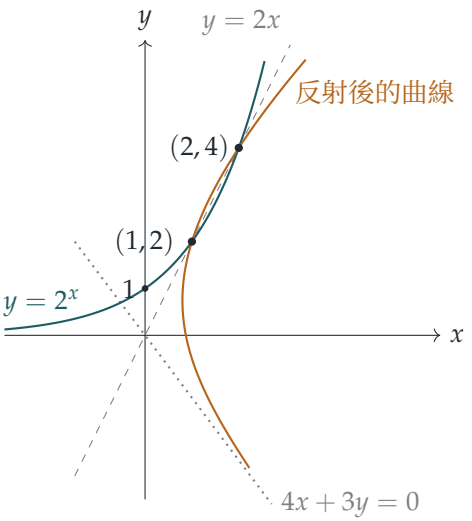
$$Y = 2^X.$$

所以 (x, y) 在第二個圖像上，當且僅當 $M(x, y)$ 在 $y = 2^x$ 上。反射會抵銷自己（$M^2 = I$，可以自行把乘積展開驗證），所以 $(x, y) = M(X, Y)$。這又是第 (i) 部分的論證：第二個圖像就是 $y = 2^x$ 關於直線 $y = 2x$ 的反射。

想一想 反射後曲線的漸近線去了哪裏？曲線又朝哪個方向伸向無窮遠？

把 $y = 2^x$ 的特徵逐一反射。

- 漸近線（*asymptote*）。當 $x \to -\infty$，$y = 2^x$ 趨近 x 軸。方向 $(1,0)$ 反射成 $M(1,0) = (-0.6, 0.8)$，所以 x 軸反射成直線 $4x + 3y = 0$，即 $y = -\frac{4}{3}x$。等價地說，$Y = 0.8x + 0.6y = 2^X > 0$，所以反射後的曲線嚴格位於 $4x + 3y > 0$ 那一側，並在 $X \to -\infty$ 時趨近 $4x + 3y = 0$。在遠處，$y = 2^x$ 上的點大約是 $(X, 0)$，其中 X 是很大的負數，這些點反射後大約是 $(-0.6X, 0.8X)$。所以反射後的曲線在第四象限趨近其漸近線，此時 $x \to +\infty$ 而 $y \to -\infty$。
- 鏡線上的點。反射保持 $y = 2x$ 上每一點不動。而 $2^x = 2x$ 在 $x = 1$ 和 $x = 2$ 成立（也只在這兩處成立，因為 $2^x - 2x$ 是凸函數（convex））。所以兩條曲線都經過 $(1,2)$ 和 $(2,4)$，並在那裏相交。用電腦沿 $y = 2^x$ 搜尋，找不到其他公共點。
- 其他點。$(0,1)$ 反射成 $(0.8, 0.6)$。
- 最左點。反射後的曲線是 $\left(-0.6t + 0.8 \cdot 2^t,\quad 0.8t + 0.6 \cdot 2^t\right)$。它的 x 坐標在 $0.8 \cdot 2^t \ln 2 = 0.6$ 時最小，該點大約是 $(0.80, 0.74)$。那裏的切線是鉛垂的，所以反射後的曲線並不是 x 的函數的圖像。
- 增長。當 $X \to +\infty$，點 $(X, 2^X)$ 反射後大約是 $2^X(0.8, 0.6)$。所以曲線向右上方伸展，方向大致是斜率 $\frac{3}{4}$。



第 (iii) 部分

$0 \le x \le 2\pi$ 範圍內的圖像 $y = \sin x$ 就是大家熟悉的一個完整波形。

對於 $y = \sin(x - 2y)$，設 $u = x - 2y$。點 (x, y) 在曲線上，當且僅當 $y = \sin u$，而此時 $x = u + 2y$。所以該曲線恰好是

$$x = u + 2\sin u, \qquad y = \sin u.$$

這就是把 $y = \sin x$ 上每一點向橫方向推移其高度的兩倍：即水平剪切 $(u, v) \mapsto (u + 2v, v)$。

*哪些 u 給出 $0 \le x \le 2\pi$？*設 $x(u) = u + 2\sin u$。那麼 $x(-u) = -x(u)$ 而且 $x(u + 2\pi) = x(u) + 2\pi$。由於 $x'(u) = 1 + 2\cos u$，函數 $x(u)$ 在 $[0, \frac{2\pi}{3}]$ 上由 0 遞增至 $\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3} \approx 3.83$，然後在 $[\frac{2\pi}{3}, \pi]$ 上遞減至 π。所以當 $0 < u \le \pi$ 時它落在 $(0, 2\pi)$ 內，而在 $[\pi, 2\pi]$ 上，對稱性 $x(2\pi - u) = 2\pi - x(u)$ 保證它落在 $(0, 2\pi]$ 內。對於 $u > 2\pi$，由歸納法（induction）得 $x(u) = x(u - 2\pi) + 2\pi > 2\pi$；對於 $u < 0$，由奇函數（odd function）的性質得 $x(u) < 0$。所以當 u 由 0 走到 2π 時，所需的那段曲線恰好被描出一次，由 $(0, 0)$ 走到 $(2\pi, 0)$。

*切線。*沿着曲線，

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = 1 + 2\cos u, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} = \cos u, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\cos u}{1 + 2\cos u}.$$

這兩個導數不會同時為零，因為 $\cos u = 0$ 時 $1 + 2\cos u = 1$。

- 水平切線出現在 $\cos u = 0$ 之處，即 $u = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$：

$$\left(\tfrac{\pi}{2} + 2,\ 1\right) \quad \text{及} \quad \left(\tfrac{3\pi}{2} - 2,\ -1\right).$$

- 鉛垂切線出現在 $\cos u = -\frac{1}{2}$ 之處，即 $u = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$：

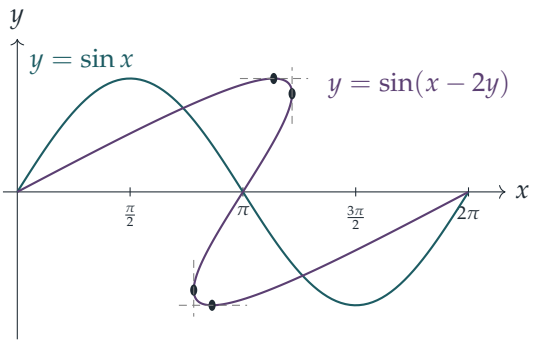
$$\left(\tfrac{2\pi}{3} + \sqrt{3},\ \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{及} \quad \left(\tfrac{4\pi}{3} - \sqrt{3},\ -\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

它們的數值大約是 $(3.57, 1)$、$(2.71, -1)$、$(3.83, 0.87)$ 和 $(2.46, -0.87)$。

> **想一想** 頂部的水平切線位於 $x \approx 3.57$，但曲線之後仍然到達 $x \approx 3.83$。曲線實際上是甚麼樣子的？

讓 u 由 0 走到 2π。曲線以斜率 $\frac{1}{3}$ 離開原點（代入 $u = 0$），比 $y = \sin x$ 平緩。它上升至最高點 $(\frac{\pi}{2} + 2, 1)$，然後向右下方移動，到達位於 $(\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 的鉛垂切線。接着它向左彎回，以斜率 $\frac{-1}{-1} = 1$ 經過 $(\pi, 0)$。它到達位於 $(\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ 的第二條鉛垂切線，再向右轉經過最低點 $(\frac{3\pi}{2} - 2, -1)$，然後上升至 $(2\pi, 0)$。這條曲線像一個正在捲起的浪頭般向前懸垂。在 $x \approx 2.46$ 與 $x \approx 3.83$ 之間，每個 x 對應三個 y 值。整幅圖關於 $(\pi, 0)$ 有半周旋轉對稱（half-turn symmetry）。

順帶一提，兩個圖像在 $\sin x = \sin(x - 2\sin x)$ 之處相交。要麼 $\sin x = 0$，得 $x = 0, \pi, 2\pi$；要麼 $x - \sin x = \frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{3\pi}{2}$，得 $x \approx 2.31$ 和 $x \approx 3.97$。



驗算

- 第 (i) 部分：取 G_1 的頂點 $(3,0)$。它被映射到 $\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$，而 G_2 方程中的兩個括號分別給出 3 和 0，所以左邊等於 1。
- 第 (ii) 部分：$M\binom{1}{2} = \binom{-0.6+1.6}{0.8+1.2} = \binom{1}{2}$，正如不變點應有的結果。點 $(1,2)$ 也滿足第二條方程：$0.8+1.2 = 2 = 2^{-0.6+1.6}$。
- 第 (iii) 部分：在 $\left(\frac{\pi}{2}+2, 1\right)$，得 $x-2y = \frac{\pi}{2}$，而 $\sin\frac{\pi}{2} = 1 = y$。同樣，$\left(\frac{2\pi}{3}+\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 給出 $x-2y = \frac{2\pi}{3}$，而 $\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$。隱函數微分給出 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\cos(x-2y)}{1+2\cos(x-2y)}$。它的分子在第一點為 0，分母在第二點為 0。

常見錯誤

- 只證明了 G_1 被映射到 G_2 之內。要說 G_2 就是旋轉後的曲線，還需要證明 G_2 上每一點都來自 G_1，這就要用到逆映射。
- 把 $y = \sin(x-2y)$ 當作 x 的函數，結果把曲線畫成一個沒有懸垂部分的普通波形。鉛垂切線正是曲線向回摺的地方。
- 忘記反射後的指數曲線有一條斜漸近線（oblique asymptote）$4x+3y = 0$，而且整條曲線完全位於它的一側。

STEP 之外

這道題背後的原理是：把可逆映射（invertible map）T 作用於曲線 $f(x,y) = 0$，得到的是曲線 $f\left(T^{-1}(x,y)\right) = 0$。在大學一年級的線性代數（linear algebra）課程中，這會發展成研究二次型（quadratic form）在基變換（change of basis）之下如何改變。旋轉坐標軸以消去圓錐曲線（conic）中的 xy 項，正是對稱矩陣（symmetric matrix）對角化（diagonalisation）在二維的情況。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導

論》）以非常易讀的方式講解旋轉、反射及其特徵向量（eigenvector）（第 (ii)(a) 部分中的不變直線就是一個特徵值（eigenvalue）為 1 的特徵向量）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。