詳細解答

STEP III 2025，第 3 題

純數學 • 平均值不等式

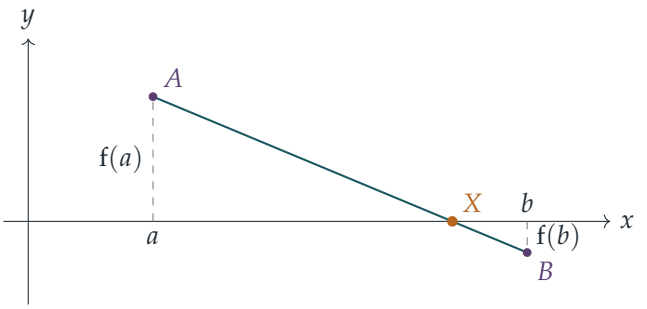
STEP III 2025，第 3 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2025 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

關鍵思路

由於 A 位於軸的上方而 B 位於軸的下方，交點 X 會把 AB 按兩個高度之比 $\mathrm{f}(a) : \mathrm{f}(b)$ 分割。因此 m 是 a 與 b 的*加權平均*（*weighted average*），而接下來的一切，都是關於這些權重如何隨 f 改變。一旦把 m 寫成單一比值 $\mathrm{f}(a)/\mathrm{f}(b)$ 的函數，比較兩個不同的 f 就變成比較兩個數。



解答

第 (i) 部分

由 A、其垂足 $(a,0)$ 及 X 組成的三角形，與由 B、其垂足 $(b,0)$ 及 X 組成的三角形，是相似三角形（similar triangles）（在 X 處的對頂角相等，在垂足處均為直角）。因此

$$\frac{m-a}{b-m} = \frac{\mathrm{f}(a)}{\mathrm{f}(b)} \quad \Longrightarrow \quad m\,\mathrm{f}(b) - a\,\mathrm{f}(b) = b\,\mathrm{f}(a) - m\,\mathrm{f}(a),$$

所以

$$\boxed{m = \frac{a\,\mathrm{f}(b) + b\,\mathrm{f}(a)}{\mathrm{f}(a) + \mathrm{f}(b)}}.$$

（由於 $\mathrm{f} > 0$，分母為正；把 $y = 0$ 代入直線方程 $y - \mathrm{f}(a) = -\frac{\mathrm{f}(a)+\mathrm{f}(b)}{b-a}(x-a)$，亦可得出相同答案。）

值得設 $r = \mathrm{f}(a)/\mathrm{f}(b) > 0$，把分子和分母同時除以 $\mathrm{f}(b)$，將結果改寫為：

$$m = \frac{a + br}{1 + r} = b - \frac{b - a}{1 + r}. \qquad (*)$$

第 (ii) 部分

當 $\mathrm{f}(x) = \sqrt{x}$ 時，

$$m = \frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}\sqrt{b}\,(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \sqrt{ab},$$

此即所求。

至於第二個目標，分子 $a^{n+1} + b^{n+1}$ 應該是由 $a\,\mathrm{f}(b) + b\,\mathrm{f}(a)$ 通分後得來，這提示 $\mathrm{f}(b)$ 應該表現得像 b^{-n}。試取 $\mathrm{f}(x) = x^{-n}$，它在 $x > 0$ 時為正：

$$m = \frac{ab^{-n} + ba^{-n}}{a^{-n} + b^{-n}} = \frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{b^n + a^n},$$

這裏把分子和分母同時乘以 $a^n b^n$。所以 $\mathrm{f}(x) = x^{-n}$ 符合要求（它的任何正常數倍亦然，因為 m 只取決於比值 $\mathrm{f}(a)/\mathrm{f}(b)$）。留意 $n = -\frac{1}{2}$ 正好還原第一個結果。

第 (iii) 部分

設 $r_1 = \mathrm{g}_1(a)/\mathrm{g}_1(b)$ 及 $r_2 = \mathrm{g}_2(a)/\mathrm{g}_2(b)$，兩者均為正數。由 $(*)$，$M_i = b - \dfrac{b-a}{1+r_i}$。由於 $b - a > 0$，當 $r > 0$ 時，式子 $b - \frac{b-a}{1+r}$ 對 r 嚴格遞增（strictly increasing），所以只需證明 $r_1 > r_2$。

> **想一想** 一個關於函數 $\mathrm{g}_1/\mathrm{g}_2$ 的條件，怎樣轉化為關於 r_1 和 r_2 的條件？

記 $h = \mathrm{g}_1/\mathrm{g}_2$。於是

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\mathrm{g}_1(a)\,\mathrm{g}_2(b)}{\mathrm{g}_1(b)\,\mathrm{g}_2(a)} = \frac{h(a)}{h(b)} > 1,$$

因為 h 遞減（decreasing）且 $a < b$，故 $h(a) > h(b) > 0$。由於 $r_2 > 0$，可得 $r_1 > r_2$，從而 $M_1 > M_2$。

由此。我們需要三個函數，使其對應的 m 值分別是這三個平均值。

- $f(x) = 1$（常數）給出 $m = \dfrac{a+b}{2}$。
- 由第 (ii) 部分，$f(x) = \sqrt{x}$ 給出 $m = \sqrt{ab}$。
- $f(x) = x$ 給出 $m = \dfrac{ab+ba}{a+b} = \dfrac{2ab}{a+b}$。

現在把剛證明的結果應用兩次。取 $g_1 = 1$、$g_2 = \sqrt{x}$，比值 $g_1/g_2 = x^{-1/2}$ 在 $x > 0$ 時遞減，所以 $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$。取 $g_1 = \sqrt{x}$、$g_2 = x$，比值同樣是 $x^{-1/2}$，亦為遞減，所以 $\sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$。合起來，

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}.$$

第 (iv) 部分

曲線經過 A 和 B，所以

$$f(a) = p(c-a)^3, \qquad -f(b) = p(c-b)^3, \text{ 即 } f(b) = p(b-c)^3.$$

由於 $f(b) > 0$，我們有 $p \neq 0$ 及 $b \neq c$，因此可以相除：

$$\frac{f(a)}{f(b)} = \left(\frac{c-a}{b-c}\right)^3.$$

每個實數都恰好有一個實立方根（cube root），所以取立方根是可逆的，故

$$\frac{c-a}{b-c} = \left(\frac{f(a)}{f(b)}\right)^{1/3},$$

此即所求。把右方記作 k（$k > 0$），則 $c - a = k(b-c)$，所以 $c(1+k) = a + kb$，而

$$c = \frac{a+kb}{1+k} = \frac{a\,f(b)^{1/3} + b\,f(a)^{1/3}}{f(a)^{1/3} + f(b)^{1/3}},$$

這裏把分子和分母同時乘以 $f(b)^{1/3}$。

想一想 我們以前在哪裏見過這條公式？

它正是第 (i) 部分的公式，只是把 f 換成 $f^{1/3}$，而後者在 $x > 0$ 時同樣有定義且為正。所以 c 就是函數 $f^{1/3}$ 所對應的 m 值。取 $g_1 = f$ 及 $g_2 = f^{1/3}$，應用第 (iii) 部分：

$$\frac{g_1(x)}{g_2(x)} = f(x)^{2/3}.$$

若 f 遞減且為正，則 $f^{2/3}$ 亦然，因為 $t \mapsto t^{2/3}$ 在 $t > 0$ 時遞增。因此第 (iii) 部分給出 $M_1 > M_2$，其中 $M_1 = m$（對應 f 本身）及 $M_2 = c$。故 $c < m$。

驗算

- 取 $a = 1$、$b = 4$。三個平均值為 $2.5 > 2 > 1.6$，而 $\mathrm{f} = \sqrt{x}$ 給出 $m = (1 \cdot 2 + 4 \cdot 1)/3 = 2 = \sqrt{4}$。
- 當 $\mathrm{f}(x) = 1/x$、$a = 1$、$b = 4$ 時：$m = \frac{1/4+4}{5/4} = 3.4$，而 $k = 4^{1/3} \approx 1.587$ 給出 $c \approx 2.84 < 3.4$，與第 (iv) 部分的預測一致。m 和 c 都位於 a 與 b 之間，正如加權平均必然如此。
- 在第 (ii) 部分中設 $n = 0$，得 $\mathrm{f} = 1$ 及 $m = \frac{a+b}{2}$；設 $n = -1$，得 $\mathrm{f} = x$ 及 $m = \frac{2ab}{a+b}$，與第 (iii) 部分一致。

以上各項，以及對每個結果在大量不同的 a、b 和 f 下所作的隨機測試，均已用電腦核實。

常見錯誤

- 忘記 B 的高度是 $-\mathrm{f}(b)$，結果得出分母 $\mathrm{f}(b) - \mathrm{f}(a)$，而所得的點未必位於 a 與 b 之間。
- 在第 (iii) 部分，試圖一次過交叉相乘四個函數值來比較 M_1 和 M_2，而不是化簡為單一比值 r。
- 在第 (iv) 部分，把 $\mathrm{g}_1 = \mathrm{f}^{1/3}$、$\mathrm{g}_2 = \mathrm{f}$ 的次序弄反：它們的比值 $\mathrm{f}^{-2/3}$ 是遞增的，所以按這個次序不能應用第 (iii) 部分。

STEP 之外

這裏每一個 m 都是加權平均 $\lambda a + (1-\lambda)b$，而第 (iii) 部分巧妙地為整個冪平均族 $\left(a^{n+1} + b^{n+1}\right)/\left(a^n + b^n\right)$（即萊默平均（Lehmer means））排出大小次序，它們隨 n 遞增。平均值之間的不等式，以及背後的凸性（convexity）論證，是大學一年級分析課的基本內容。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）和 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等數學難題》）都是見識更多這類論證的好去處。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。