詳細解答

STEP III 2025，第 2 題

純數學 • 迭代函數與周期性

STEP III 2025，第 2 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2025 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

本題在 *Beyond STEP* 第 8.8 節週期三蘊含混沌中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch08/period-three.html

關鍵思路

本題所有函數都由直線段組成，所以整道題的關鍵在於清楚掌握自己身處哪一段。逐段求出 $f(f(x))$ 和 $f(f(f(x)))$，利用內層函數的正負號去掉每個絕對值（modulus）。然後倒過來理解有關數列的問題：$f^n(x) = x$ 的解是一個經過 n 步後回到自身的起始值；而每個小於 7 的數在 f 下恰好有兩個原像（preimage），且兩者互為相反數。

解答

以下記 $f^2(x) = f(f(x))$ 和 $f^3(x) = f(f(f(x)))$。由於 f 只取決於 $|x|$，三個函數都是偶函數（even function），所以只需處理 $x \geq 0$ 的情況，再關於 y 軸作反射即可。

第 (i) 部分

(a) $y = f(x)$ 的圖像是一個倒 V 形，頂點為 $(0, 7)$，斜率（gradient）為 ∓ 2，與 x 軸相交於 $x = \pm\frac{7}{2}$。

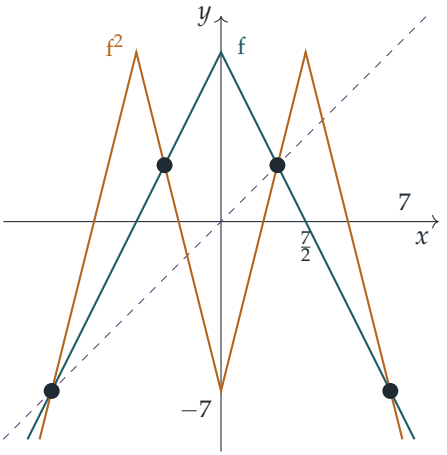
求 f^2 時需要知道 $f(x)$ 的正負號。若 $0 \leq x \leq \frac{7}{2}$，則 $f(x) = 7 - 2x \geq 0$，所以

$$f^2(x) = 7 - 2(7 - 2x) = 4x - 7.$$

若 $x \geq \frac{7}{2}$，則 $f(x) \leq 0$，所以 $|f(x)| = 2x - 7$，且

$$f^2(x) = 7 - 2(2x - 7) = 21 - 4x.$$

因此 $y = \mathrm{f}^2(x)$ 呈 W 形：在 $x = 0$ 處的值為 -7，在 $x = \pm\frac{7}{2}$ 處(正是 f 等於零的位置)有高度為 7 的峯，斜率為 ± 4，x 截距為 $\pm\frac{7}{4}$ 和 $\pm\frac{21}{4}$。解 $7 - 2x = 4x - 7$ 和 $7 - 2x = 21 - 4x$，可知兩條圖像相交於 $(\pm\frac{7}{3}, \frac{7}{3})$ 和 $(\pm 7, -7)$。



(青色：$y = \mathrm{f}(x)$；琥珀色：$y = \mathrm{f}^2(x)$；虛線：$y = x$。)

(b) 我們在四段上分別求解，只保留落在相應範圍內的根。

- $0 \le x \le \frac{7}{2}$：由 $4x - 7 = x$ 得 $x = \frac{7}{3}$，在範圍內。
- $x \ge \frac{7}{2}$：由 $21 - 4x = x$ 得 $x = \frac{21}{5} = 4.2$，在範圍內。
- $-\frac{7}{2} \le x \le 0$：此時 $\mathrm{f}^2(x) = -4x - 7$，由 $-4x - 7 = x$ 得 $x = -\frac{7}{5}$，在範圍內。
- $x \le -\frac{7}{2}$：此時 $\mathrm{f}^2(x) = 21 + 4x$，由 $21 + 4x = x$ 得 $x = -7$，在範圍內。

所以 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) = x$ 恰好有四個解：

$$x = -7, \quad -\tfrac{7}{5}, \quad \tfrac{7}{3}, \quad \tfrac{21}{5}.$$

(c) 數列的週期（period）為 2，當且僅當 $u_2 = u_0$，即 $\mathrm{f}^2(a) = a$，但 $u_1 \ne u_0$，即 $\mathrm{f}(a) \ne a$。

想一想 (b) 的四個答案是否都給出週期為 2 的數列？

不是。其中兩個是 f 本身的不動點(fixed point)：$\mathrm{f}(\frac{7}{3}) = 7 - \frac{14}{3} = \frac{7}{3}$ 與 $\mathrm{f}(-7) = 7 - 14 = -7$。它們給出常數數列，週期為 1。另外兩個則互相交換：

$$\mathrm{f}\left(-\tfrac{7}{5}\right) = 7 - \tfrac{14}{5} = \tfrac{21}{5}, \qquad \mathrm{f}\left(\tfrac{21}{5}\right) = 7 - \tfrac{42}{5} = -\tfrac{7}{5}.$$

所以數列的週期為 2，當且僅當 $a = -\frac{7}{5}$ 或 $a = \frac{21}{5}$。

(d) 取 $a = \frac{28}{5}$，

$$u_1 = 7 - \tfrac{56}{5} = -\tfrac{21}{5}, \qquad u_2 = 7 - \tfrac{42}{5} = -\tfrac{7}{5}, \qquad u_3 = \mathrm{f}\left(-\tfrac{7}{5}\right) = \tfrac{21}{5}.$$

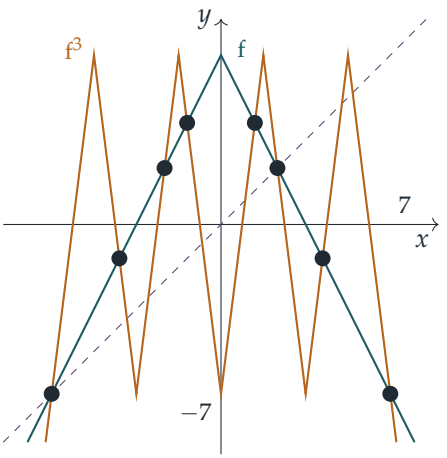
從 u_2 起，該數列就是 (c) 部分中以 $-\frac{7}{5}$ 為起點的數列，所以 $u_2, u_3, u_4, \ldots$ 為 $-\frac{7}{5}, \frac{21}{5}, -\frac{7}{5}, \ldots$，週期為 2。最後，$u_0 = \frac{28}{5}$ 和 $u_1 = -\frac{21}{5}$ 都與 $u_2 = -\frac{7}{5}$ 及 $u_3 = \frac{21}{5}$ 各不相同。（四對都要檢查，不能只查 $u_0 \neq u_2$ 和 $u_1 \neq u_3$。）這正是題目所要求的。

第 (ii) 部分

(a) 現在把 f 作用於 $\mathrm{f}^2(x)$，在 f^2 每段變號的位置，即 $x = \frac{7}{4}$ 和 $x = \frac{21}{4}$ 處，把該段再分開。對於 $x \geq 0$：

$$\mathrm{f}^3(x) = 7 - 2\left|\mathrm{f}^2(x)\right| = \begin{cases} 7 + 2(4x - 7) = 8x - 7, & 0 \leq x \leq \frac{7}{4}, \\ 7 - 2(4x - 7) = 21 - 8x, & \frac{7}{4} \leq x \leq \frac{7}{2}, \\ 7 - 2(21 - 4x) = 8x - 35, & \frac{7}{2} \leq x \leq \frac{21}{4}, \\ 7 + 2(21 - 4x) = 49 - 8x, & x \geq \frac{21}{4}. \end{cases}$$

所以圖像以斜率 ± 8 在 -7 與 7 之間來回曲折：谷底在 $(0, -7)$ 和 $(\pm\frac{7}{2}, -7)$，峯頂在 $(\pm\frac{7}{4}, 7)$ 和 $(\pm\frac{21}{4}, 7)$，然後在 $|x| > \frac{21}{4}$ 時一直下降。把 $7 - 2x$ 與每一段聯立求解，可知它與 $y = \mathrm{f}(x)$ 相交於 $(\pm\frac{7}{5}, \frac{21}{5})$、$(\pm\frac{7}{3}, \frac{7}{3})$、$(\pm\frac{21}{5}, -\frac{7}{5})$ 和 $(\pm 7, -7)$。



（青色：$y = \mathrm{f}(x)$；琥珀色：$y = \mathrm{f}^3(x)$；虛線：$y = x$。）

(b) 從 $a = 1$ 開始：$u_1 = 7 - 2 = 5$，$u_2 = 7 - 10 = -3$，$u_3 = 7 - 6 = 1$。從 $a = -\frac{7}{9}$ 開始：

$$u_1 = 7 - \tfrac{14}{9} = \tfrac{49}{9}, \qquad u_2 = 7 - \tfrac{98}{9} = -\tfrac{35}{9}, \qquad u_3 = 7 - \tfrac{70}{9} = -\tfrac{7}{9}.$$

所以兩個數列都在三步後回到起點：它們分別是 3-循環（cycle）$1 \to 5 \to -3 \to 1$ 和 $-\frac{7}{9} \to \frac{49}{9} \to -\frac{35}{9} \to -\frac{7}{9}$。

3-循環中的每一項(不只是起始值)都滿足 $\mathrm{f}^3(x) = x$，所以這給出六個解 $1,\ 5,\ -3,\ -\frac{7}{9},\ \frac{49}{9},\ -\frac{35}{9}$。此外，f 的任何不動點都滿足 $\mathrm{f}^3(x) = x$，這就加上第 (i) 部分的 $\frac{7}{3}$ 和 -7。合共八個不同的解。

想一想 我們怎樣知道沒有其他解？

(ii)(a) 中的公式顯示 f^3 由八段直線組成（$x \geq 0$ 時四段，加上它們的鏡像），每段的斜率都是 ± 8。由於沒有任何一段與 $y = x$ 平行，每段與直線 $y = x$ 最多相交一次，所以最多有八個解。我們已找到八個，因此 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathrm{f}(x))) = x$ 的完整解集是

$$x = -7, \quad -\tfrac{35}{9}, \quad -3, \quad -\tfrac{7}{9}, \quad 1, \quad \tfrac{7}{3}, \quad 5, \quad \tfrac{49}{9}.$$

(草圖亦吻合：虛線與八條琥珀色線段各相交一次。)

(c) 我們仿照 (i)(d) 的思路，從一個 3-循環倒推。由於 $\mathrm{f}(y) = c$ 表示 $|y| = \frac{1}{2}(7 - c)$，每個 $c < 7$ 恰有兩個原像 $\pm\frac{1}{2}(7 - c)$。從循環 $1 \to 5 \to -3 \to 1$ 中取 $u_3 = 1$。1 在循環內的原像是 -3，所以要離開循環，就選另一個原像 $u_2 = 3$，它不在循環中。於是

$$\mathrm{f}(u_1) = 3 \ \Rightarrow\ |u_1| = 2, \quad \text{取} u_1 = 2; \qquad \mathrm{f}(u_0) = 2 \ \Rightarrow\ |u_0| = \tfrac{5}{2}, \quad \text{取} u_0 = \tfrac{5}{2}.$$

所以 $a = \frac{5}{2}$ 可行。順推驗證：

$$\tfrac{5}{2},\ 2,\ 3,\ 1,\ 5,\ -3,\ 1,\ 5,\ -3,\ \ldots$$

從 u_3 起，數列沿循環 $1, 5, -3$ 運行，週期為 3；而 $u_0, u_1, u_2 = \frac{5}{2}, 2, 3$ 都與 1、5 和 -3 不同。

(其他選擇亦可：例如 $a = -\frac{5}{2}$ 或 $a = \pm\frac{9}{2}$，它們導致 $u_1 = -2$；或 $a = \frac{3}{2}$，它經由 $u_2 = -1$ 在 $u_3 = 5$ 進入循環。)

驗算

- 每個所聲稱的解都可以用手迭代驗證：例如 $\frac{49}{9} \to -\frac{35}{9} \to -\frac{7}{9} \to \frac{49}{9}$，以及 $\frac{28}{5} \to -\frac{21}{5} \to -\frac{7}{5} \to \frac{21}{5} \to -\frac{7}{5}$。
- 用電腦在 $-30 \leq x \leq 30$ 範圍內掃描 $\mathrm{f}^3(x) - x$，只在 -7、-3.889、-3、-0.778、1、2.333、5 和 5.444 附近發現變號，與八個解吻合；對 $\mathrm{f}^2(x) - x$ 作同樣掃描，只發現 -7、-1.4、2.333 和 4.2。
- 計數檢查：f^n 有 2^n 段斜率為 $\pm 2^n$ 的線性段，所以 $\mathrm{f}^n(x) = x$ 有 2^n 個解。當 $n = 2$ 時，這是 $4 = 2 + 2$（兩個不動點和一個 2-循環）；當 $n = 3$ 時，這是 $8 = 2 + 3 + 3$（兩個不動點和兩個 3-循環）。

常見錯誤

- 在 (i)(c) 中給出 (i)(b) 的全部四個解：不動點給出的週期是 1。
- 在 (ii)(b) 中只列出 1 和 $-\frac{7}{9}$，或忘記不動點 $\frac{7}{3}$ 和 -7 亦滿足 $\mathrm{f}^3(x) = x$。
- 草圖中把圖像交點的位置畫錯；用代數方法求出交點即可避免。

STEP 之外

這是離散動力系統（discrete dynamical system）的初步體驗。由於 f 是斜率為 2 的帳篷映射（tent map），f^n 有 2^n 段，所以存在任何週期的週期點，而這個映射是混沌（chaotic）行為的標準例子。沙可夫斯基定理（Sharkovskii's theorem）指出，對於實數線上的連續映射，若存在週期為 3 的點，則必存在任何週期的點，這就是著名的口號「週期三意味着混沌」（period three implies chaos）。Strogatz 的 *Nonlinear Dynamics and Chaos*（《非線性動力學與混沌》）是一本易讀的迭代映射入門書。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。