詳細解答

STEP III 2025，第 12 題

概率與統計 • 遞歸隨機變量

STEP III 2025，第 12 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2025 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

關鍵思路

第 (i) 部分其實只是把一個二重和(double sum)用兩種方式寫出來：兩邊都是把 $\mathrm{f}(r)\,\mathrm{g}(s)$ 在同一組數對 (r,s) 上加起來，一邊逐行計算，另一邊逐列計算。在第 (ii) 部分，以前一個值 X_{n-1} 為條件（conditioning），可把每個概率 $\mathrm{P}(X_n = r)$ 寫成恰好是 (i) 左邊那種形式的和。交換求和次序後，$\mathrm{E}(X_n)$ 就變成一個能以 $\mathrm{E}(X_{n-1})$ 表示的式子。

解答

第 (i) 部分

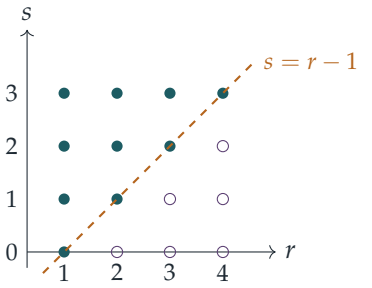
把括號展開，左邊是

$$\sum_{r=1}^{m+1}\ \sum_{s=r-1}^{m} \mathrm{f}(r)\,\mathrm{g}(s),$$

即 $\mathrm{f}(r)\,\mathrm{g}(s)$ 在所有滿足

$$1 \le r \le m+1 \quad \text{及} \quad r-1 \le s \le m.$$

的整數對 (r,s) 上的和。我們先固定 s 來描述同一組數對。這些條件迫使 $0 \le s \le m$（因為 $s \ge r-1 \ge 0$），而對於這樣的某個 s，容許的 r 是滿足 $1 \le r$ 及 $r \le s+1$ 的那些；注意 $s+1 \le m+1$，所以界限 $r \le m+1$ 自動成立。反過來，任何滿足 $0 \le s \le m$ 及 $1 \le r \le s+1$ 的數對都符合原來的條件。下圖顯示 $m = 3$ 時的三角形數對區域。



按列求和（固定 r）得到左邊；按行求和（固定 s）則得到

$$\sum_{s=0}^{m}\sum_{r=1}^{s+1} \mathrm{f}(r)\,\mathrm{g}(s) = \sum_{s=0}^{m}\Big(\mathrm{g}(s)\sum_{r=1}^{s+1}\mathrm{f}(r)\Big),$$

這正是右邊，得證。由於這些都是有限和，重新排列求和次序總是容許的。

第 (ii)(a) 部分

X_1 取 0 或 1 的機會均等，所以 $\mathrm{E}(X_1) = \frac{1}{2}$。

至於 X_2，以 X_1 為條件。若 $X_1 = 0$，則 X_2 在 $\{0,1\}$ 上均勻分佈（uniform）；若 $X_1 = 1$，則 X_2 在 $\{0,1,2\}$ 上均勻分佈。由全概率定律（law of total probability），

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X_2 = 0) &= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3} = \tfrac{5}{12},\\
\mathrm{P}(X_2 = 1) &= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3} = \tfrac{5}{12},\\
\mathrm{P}(X_2 = 2) &= \tfrac{1}{2}\cdot 0 + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{6},
\end{aligned}$$

如題所求（三者之和為 1，這是個有用的驗算）。因此

$$\mathrm{E}(X_2) = 0\cdot\tfrac{5}{12} + 1\cdot\tfrac{5}{12} + 2\cdot\tfrac{1}{6} = \tfrac{3}{4}.$$

第 (ii)(b) 部分

由歸納法（induction），X_{n-1} 的取值在 $\{0,1,\ldots,n-1\}$ 之中（每一步把可能的最大值提高一）。已知 $X_{n-1} = s$ 時，X_n 在 $s+2$ 個值 $0,1,\ldots,s+1$ 上均勻分佈，所以

$$\mathrm{P}(X_n = r \mid X_{n-1} = s) = \begin{cases} \dfrac{1}{s+2}, & 0 \le r \le s+1,\\[2mm] 0, & r > s+1. \end{cases}$$

值 $r = 0$ 總是可能出現的，所以全概率定律給出

$$\mathrm{P}(X_n = 0) = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{\mathrm{P}(X_{n-1} = s)}{s+2}.$$

對於 $1 \le r \le n$，只有滿足 $s+1 \ge r$，即 $s \ge r-1$ 的那些 s 才有貢獻：

$$\mathrm{P}(X_n = r) = \sum_{s=r-1}^{n-1} \frac{\mathrm{P}(X_{n-1}=s)}{s+2}, \qquad r = 1, 2, \ldots, n.$$

（當 $r=1$ 時，這與 $r=0$ 的和相同，所以對每個 $n \ge 1$ 都有 $\mathrm{P}(X_n=0) = \mathrm{P}(X_n=1)$，與 (a) 中兩個 $\frac{5}{12}$ 吻合。）

第 (ii)(c) 部分

記 $p_s = \mathrm{P}(X_{n-1}=s)$。$r=0$ 的項對期望值（expectation）沒有貢獻，所以由 (b)，

$$\mathrm{E}(X_n) = \sum_{r=1}^{n} r\,\mathrm{P}(X_n=r) = \sum_{r=1}^{n}\Big(r \sum_{s=r-1}^{n-1} \frac{p_s}{s+2}\Big).$$

? **想一想** 第 (i) 部分在這裏如何應用？

這就是 (i) 的左邊，其中 $m = n-1$（因 $n \ge 1$，這是容許的）、$\mathrm{f}(r) = r$ 及 $\mathrm{g}(s) = p_s/(s+2)$。交換求和次序，

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X_n) &= \sum_{s=0}^{n-1}\Big(\frac{p_s}{s+2}\sum_{r=1}^{s+1} r\Big) = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{p_s}{s+2}\cdot\frac{(s+1)(s+2)}{2} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{s=0}^{n-1}(s+1)\,p_s = \frac{1}{2}\Big(\sum_{s=0}^{n-1} p_s + \sum_{s=0}^{n-1} s\,p_s\Big) \\
&= \tfrac{1}{2}\big(1 + \mathrm{E}(X_{n-1})\big),
\end{aligned}$$

這裏用了 $\sum p_s = 1$。這就是所求的結果。

直觀而言：已知 $X_{n-1}=s$ 時，在 $\{0,\ldots,s+1\}$ 上均勻分佈的變量的平均值是 $\frac{1}{2}(s+1)$，所以這其實是喬裝了的塔性質（tower law）。

要解這個遞推關係（recurrence relation），記 $e_n = \mathrm{E}(X_n)$。兩邊同時減去 1，

$$e_n - 1 = \tfrac{1}{2}\,(e_{n-1} - 1),$$

所以 $e_n - 1$ 每一步減半。由於 $e_0 = 0$，得 $e_n - 1 = -\big(\frac{1}{2}\big)^n$，即

$$\mathrm{E}(X_n) = 1 - \frac{1}{2^n}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

驗算

此公式給出 $\mathrm{E}(X_1) = \frac{1}{2}$ 及 $\mathrm{E}(X_2) = \frac{3}{4}$，與 (a) 一致。逐步計算 X_n 的精確分佈直至 $n = 15$，證實了 (b) 中的表達式及 $\mathrm{E}(X_n) = 1 - 2^{-n}$；例如 $\mathrm{E}(X_5) = \frac{31}{32} \approx 0.969$，而以電腦模擬 200 000 次得到 0.967。當 $n \to \infty$ 時，平均值趨向 1，這是合理的：每一步都把平均值向 1 拉近一半距離。

常見錯誤

- 把 $\mathrm{P}(X_n = r)$ 的和從 $s = r$ 而非 $s = r - 1$ 開始：由於 X_n 最大可達 $X_{n-1} + 1$，值 r 可以從 $s = r - 1$ 到達。
- 在 (c) 中交換次序時弄錯上下限：交換後，r 由 1 取到 $s + 1$，得 $\frac{1}{2}(s+1)(s+2)$，而因子 $s + 2$ 會整齊地約去。
- 以 e_1 作為起始值解遞推關係，卻寫成 $1 - 2^{-(n-1)}$；應以 $e_1 = \frac{1}{2}$ 核對。

STEP 之外

這裏的過程是一條馬爾可夫鏈（Markov chain）：X_n 的分佈只取決於 X_{n-1}，而 (b) 就是把概率向量（probability vector）乘以轉移矩陣（transition matrix）的一步。(c) 中的捷徑是全期望定律（law of total expectation），$\mathrm{E}(X_n) = \mathrm{E}\big(\mathrm{E}(X_n \mid X_{n-1})\big)$，它能把許多這類問題化為線性遞推關係。這兩個概念在 Grimmett 與 Welsh 所著的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）中都有進一步發展。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。