詳細解答

STEP III 2025，第 10 題

力學 • 移動木板上的摩擦力

> **STEP III 2025，第 10 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2025 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

關鍵思路

先解關於 h 的微分方程（differential equation）：這是簡諧運動（simple harmonic motion），它表示木板的傾角以恆定速率 ω 增加。知道角度之後，質點的位置固定在木板全長的某個比例處，因此求兩次導數（derivative）便得到它的加速度。然後在垂直於木板和沿着木板兩個方向分解，應用牛頓第二定律（Newton's second law）就得出各個力，這比沿水平和鉛垂方向分解簡潔得多。

解答

我們把木板視為剛性桿，把 P 視為質點。設 θ 為木板與水平面所成的角。

第 (i) 部分

方程 $\ddot{\mathrm{h}} = -\omega^2 \mathrm{h}$ 的通解（general solution）為 $\mathrm{h} = a\cos\omega t + b\sin\omega t$。條件 $\mathrm{h}(0) = 0$ 給出 $a = 0$，而 $\dot{\mathrm{h}}(0) = b\omega = \omega L$ 給出 $b = L$，所以

$$\mathrm{h}(t) = L\sin\omega t.$$

由於 A 位於高度 h，而木板長度為 L，故 $\sin\theta = \mathrm{h}/L = \sin\omega t$，所以 $\theta = \omega t$（對 $0 \le \omega t \le \frac{\pi}{2}$ 成立，這已涵蓋整個運動過程：在此之後 A 便須升至高於 L 的高度）。因此 $A = (0, L\sin\omega t)$，$B = (L\cos\omega t, 0)$。

點 C 位於由 A 到 B 的比例 s 處，所以 $C = A + s(B - A)$：

$$x = sL\cos\omega t, \qquad y = (1-s)L\sin\omega t.$$

第一式就是所求的 x 坐標，第二式則是相應的 y 坐標表達式。

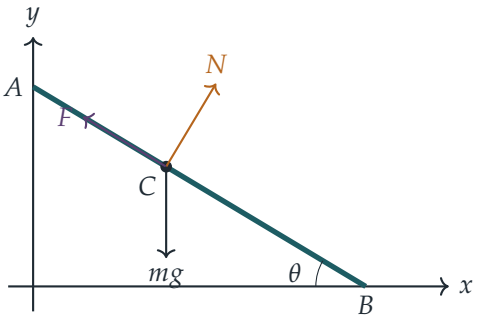
第 (ii) 部分

對 t 求導兩次，

$$\ddot{x} = -sL\omega^2 \cos\omega t, \qquad \ddot{y} = -(1-s)L\omega^2 \sin\omega t.$$

第 (iii) 部分

作用在 P 上的力有：向下的重量 mg、垂直於木板（向上）的法向反作用力（normal reaction）N，以及沿木板方向的摩擦力（friction）F；我們規定 F 沿斜面向上、指向 A 時為正。



垂直於木板(向上)的單位向量(unit vector)是 $(\sin\theta, \cos\theta)$，沿木板指向 A 的單位向量是 $(-\cos\theta, \sin\theta)$，其中 $\theta = \omega t$。把運動方程 $m(\ddot{x}, \ddot{y}) = N(\sin\theta, \cos\theta) + F(-\cos\theta, \sin\theta) + (0, -mg)$ 在這兩個方向上分解（即分別與每個單位向量取點積（dot product））：

垂直於木板方向。

$$\begin{aligned} N - mg\cos\theta &= m(\ddot{x}\sin\theta + \ddot{y}\cos\theta) \\ &= -mL\omega^2(s + (1-s))\sin\theta\cos\theta = -mL\omega^2 \sin\theta\cos\theta. \end{aligned}$$

由 $L\omega^2 = kg$，得

$$N = mg\cos\theta - mgk\sin\theta\cos\theta = mg(1 - k\sin\omega t)\cos\omega t,$$

與所求相符。

沿木板指向 A 方向。

$$\begin{aligned} F - mg\sin\theta &= m(-\ddot{x}\cos\theta + \ddot{y}\sin\theta) \\ &= mL\omega^2(s\cos^2\theta - (1-s)\sin^2\theta) = mgk(s - \sin^2\theta), \end{aligned}$$

這裏用了 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$。因此

$$F = mgsk + mg\sin\theta(1 - k\sin\theta) = mgsk + \underbrace{mg(1 - k\sin\theta)\cos\theta}_{N}\tan\theta,$$

即 $F = mgsk + N\tan\omega t$，與所求相符。留意只要 $N > 0$，F 便是正數，所以當 P 緊貼木板時，摩擦力總是沿木板向上作用。

第 (iv) 部分

記 $\mu = \tan\alpha$。當 $N > 0$ 時，質點留在 C 而不滑動，當且僅當 $|F| \le \mu N$；由於此時 $F > 0$，這等價於 $F/N \le \tan\alpha$。把第 (iii) 部分的結果除以 N，

$$\frac{F}{N} = \frac{sk}{(1 - k\sin\theta)\cos\theta} + \tan\theta.$$

開始時，$\theta = 0$，所以 $N = mg > 0$ 且 $F/N = sk$。因此只要 $sk < \tan\alpha$，質點在開始時便不會滑動。

> **想一想** 為甚麼比值 F/N 必定會在 N 變為零之前達到 $\tan\alpha$？

現在假設 $sk < \tan\alpha$。因子 $\cos\theta$ 在 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 時為零；若 $k > 1$，因子 $1 - k\sin\theta$ 會更早在 $\sin\theta = 1/k$ 時變為零。設 θ_0 為首個使 $N = 0$ 的角度（即 $\frac{\pi}{2}$ 或 $\arcsin(1/k)$）。在 $0 \le \theta < \theta_0$ 上，$N > 0$，且 F/N 連續（continuous）。當 $\theta \to \theta_0^-$ 時，分母 $(1 - k\sin\theta)\cos\theta$ 經正值趨於 0，而分子 sk 是固定的正數，所以第一項趨於 $+\infty$（而 $\tan\theta$ 要麼有界，要麼同樣趨於 $+\infty$）。因此 $F/N \to +\infty$。

所以 F/N 由 $sk < \tan\alpha$ 開始，並在 N 降至零之前無界地增大。根據介值定理（intermediate value theorem），存在首個角度 $\theta_1 < \theta_0$ 使 $F/N = \tan\alpha$，質點就在此時開始滑動。這發生在 N 仍為正的角度，這就是第一個結論。

在這個角度，由於 $sk > 0$ 且 $(1 - k\sin\theta_1)\cos\theta_1 > 0$，

$$\tan\alpha = \frac{F}{N} = \frac{sk}{(1 - k\sin\theta_1)\cos\theta_1} + \tan\theta_1 > \tan\theta_1.$$

α 和 θ_1 都在 $[0, \frac{\pi}{2})$ 內，而 tan 在此區間上遞增，所以 $\theta_1 < \alpha$：開始滑動時，木板與水平面所成的角小於 α。這就是第二個結論。

第二個結論其實沒有看上去那麼出人意表。在固定木板上靜止的質點，恰好在木板傾角達到摩擦角（angle of friction）α 時滑動。這裏木板在加速，要帶動質點一同運動需要額外的力（即 $mgsk$ 項），因此摩擦力會更早支撐不住。

驗算

- 當 $t = 0$ 時，木板水平，質點的加速度為 $(-sL\omega^2, 0)$，方向水平。此時 $N = mg$，而 $F = msL\omega^2 = mgsk$ 應恰好提供這個加速度，結果確實如此。
- 若 $\omega \to 0$（從而 $k \to 0$），木板被非常緩慢地抬起；此時 $N \to mg\cos\theta$，$F \to$

$mg\sin\theta$，正是固定斜面上熟悉的平衡值，而滑動發生在 $\theta = \alpha$，即我們不等式的邊界。

- 數值上，取 $s = \frac{1}{2}$、$k = \frac{1}{2}$ 和 $\alpha = \frac{\pi}{4}$（所以 $sk = \frac{1}{4} < 1$），解 $F/N = 1$ 可知滑動發生在 $\theta \approx 0.545$ rad，約 31°，此時 $N \approx 0.63mg > 0$ 且 $\theta < 45°$。用電腦對數以千計隨機選取、滿足 $sk < \tan\alpha$ 的 s、k 和 α 進行檢驗，每次都發現滑動發生在小於 α 的角度，且 $N > 0$。

常見錯誤

- 把 θ 取為在 A 處而非 B 處的角：這樣正弦和餘弦會互換，便得不出題目給出的表達式。
- 沿水平和鉛垂方向分解，然後試圖解一對滿是 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 的聯立方程。沿木板及垂直於木板分解，能立即把 N 和 F 分開。
- 在第 (iv) 部分，只考慮 θ 趨近 $\frac{\pi}{2}$ 的情況，而忘記當 $k > 1$ 時，法向反作用力會更早在 $\sin\theta = 1/k$ 時變為零。

STEP 之外

這道題關乎運動參考系中的力：從木板的角度看，質點會感受到一個額外的「虛構」力（fictitious force），大小等於 $-m$ 乘以點 C 的加速度，而 $mgsk$ 項正是開始時的這個慣性力。在大學裏，這個概念會發展成加速參考系和轉動參考系的完整理論，包括離心力（centrifugal force）和科里奧利力（Coriolis force）。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）討論了非慣性參考系，並附有大量例題。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。