詳細解答

STEP III 2025，第 1 題

純數學 • Beta 函數積分

> **STEP III 2025，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2025 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

關鍵思路

這裏用到的每一步，不是代換（substitution），就是恆等式（identity）$x+(1-x)=1$。反射 $x \mapsto 1-x$ 會把 p 和 q 的角色互換；用 $x+(1-x)$ 拆開被積函數（integrand），可以把相鄰的值聯繫起來；$x=\sin^2\theta$ 把積分化成三角積分；而 $x=t/(1+t)$ 則把 $[0,1)$ 拉伸到 $[0,\infty)$。最後那個積分就是把前面的結果串連起來，最終化為一個可以親手計算的 $\sin^4\theta$ 積分。

解答

第 (i) 部分

代入 $u=1-x$，於是 $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}u$，而 $x=0,1$ 分別對應 $u=1,0$：

$$\mathrm{b}(p,q)=\int_1^0 (1-u)^{p-1}u^{q-1}\,(-\mathrm{d}u)=\int_0^1 u^{q-1}(1-u)^{p-1}\,\mathrm{d}u=\mathrm{b}(q,p).$$

第 (ii) 部分

把右方的兩個積分相加，

$$\begin{aligned}\mathrm{b}(p+1,q)+\mathrm{b}(p,q+1)&=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}[x+(1-x)]\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x=\mathrm{b}(p,q),\end{aligned}$$

移項即得 $\mathrm{b}(p+1,q)=\mathrm{b}(p,q)-\mathrm{b}(p,q+1)$。

現在設 $q = p$。由第 (i) 部分，$\mathrm{b}(p, p+1) = \mathrm{b}(p+1, p)$，所以

$$\mathrm{b}(p+1,p) = \mathrm{b}(p,p) - \mathrm{b}(p+1,p) \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{b}(p+1,p) = \tfrac{1}{2}\mathrm{b}(p,p).$$

第 (iii) 部分

設 $x = \sin^2\theta$，則 $\mathrm{d}x = 2\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$，且 $1 - x = \cos^2\theta$。當 θ 由 0 變到 $\frac{1}{2}\pi$ 時，x 由 0 遞增至 1，而且 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 都是非負的，因此 $x^{p-1} = (\sin\theta)^{2p-2}$ 及 $(1-x)^{q-1} = (\cos\theta)^{2q-2}$，正負號不會出問題。因此

$$\mathrm{b}(p,q) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin\theta)^{2p-2}(\cos\theta)^{2q-2}\cdot 2\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin\theta)^{2p-1}(\cos\theta)^{2q-1}\,\mathrm{d}\theta.$$

至於第二個結果，取 $q = p$，並利用 $\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$：

$$\mathrm{b}(p,p) = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left(\tfrac{1}{2}\sin 2\theta\right)^{2p-1}\mathrm{d}\theta = 2^{2-2p}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin 2\theta)^{2p-1}\,\mathrm{d}\theta = 2^{1-2p}\int_0^{\pi} (\sin\phi)^{2p-1}\,\mathrm{d}\phi,$$

其中 $\phi = 2\theta$。

> **想一想** 怎樣才能回到一個在 $[0, \frac{1}{2}\pi]$ 上、形如 $\mathrm{b}(p,\cdot)$ 的積分？

$\sin\phi$ 在 $[0,\pi]$ 上的圖像關於 $\phi = \frac{1}{2}\pi$ 對稱（代入 $\phi \mapsto \pi - \phi$ 即可見），所以在 $[0,\pi]$ 上的積分是在 $[0, \frac{1}{2}\pi]$ 上積分的兩倍。此外，在三角形式中取 $q = \frac{1}{2}$，便有 $(\cos\theta)^{2q-1} = (\cos\theta)^0 = 1$，得

$$\mathrm{b}(p,\tfrac{1}{2}) = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin\theta)^{2p-1}\,\mathrm{d}\theta.$$

因此

$$\mathrm{b}(p,p) = 2^{1-2p}\cdot 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin\phi)^{2p-1}\,\mathrm{d}\phi = 2^{1-2p}\,\mathrm{b}(p,\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{2^{2p-1}}\,\mathrm{b}(p,\tfrac{1}{2}),$$

正是所求。

第 (iv) 部分

我們希望當 t 由 0 變到 ∞ 時，x 由 0 變到 1，同時 $1-x$ 的形式要簡單；$x = \dfrac{t}{1+t}$ 兩者兼備，且

$$1 - x = \frac{1}{1+t}, \qquad \mathrm{d}x = \frac{(1+t)-t}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^2}.$$

當 t 由 0 遞增至 ∞ 時，x 由 0 遞增並趨向 1。所以

$$\mathrm{b}(p,q) = \int_0^{\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p-1}}\cdot\frac{1}{(1+t)^{q-1}}\cdot\frac{1}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\infty}\frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\,\mathrm{d}t.$$

第 (v) 部分

把被積函數與第 (iv) 部分對照：$p-1=\frac{3}{2}$ 且 $p+q=6$，所以 $p=\frac{5}{2}$，$q=\frac{7}{2}$。這個積分就是 $\mathrm{b}(\frac{5}{2},\frac{7}{2})$，我們逐步把它化簡：

$$\begin{aligned}\mathrm{b}(\tfrac{5}{2},\tfrac{7}{2}) &= \mathrm{b}(\tfrac{7}{2},\tfrac{5}{2}) && \text{由 (i)}\\ &= \tfrac{1}{2}\,\mathrm{b}(\tfrac{5}{2},\tfrac{5}{2}) && \text{由 (ii)，取}p=\tfrac{5}{2}\\ &= \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^4}\,\mathrm{b}(\tfrac{5}{2},\tfrac{1}{2}) && \text{由 (iii)，取}p=\tfrac{5}{2}.\end{aligned}$$

最後，由三角形式取 $p=\frac{5}{2}$、$q=\frac{1}{2}$，

$$\mathrm{b}(\tfrac{5}{2},\tfrac{1}{2}) = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

兩次使用 $\sin^2\theta=\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$，

$$\sin^4\theta=\tfrac{1}{4}(1-2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta)=\tfrac{1}{8}(3-4\cos 2\theta+\cos 4\theta).$$

餘弦項在 $[0,\frac{1}{2}\pi]$ 上的積分為零（它們的原函數（antiderivative）$\sin 2\theta$ 和 $\sin 4\theta$ 在兩個端點都等於零），所以 $\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}\pi=\frac{3\pi}{16}$，而 $\mathrm{b}(\frac{5}{2},\frac{1}{2})=\frac{3\pi}{8}$。因此

$$\int_0^\infty \frac{t^{\frac{3}{2}}}{(1+t)^6}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{32}\cdot\frac{3\pi}{8}=\frac{3\pi}{256}.$$

驗算

- 取 $p=q=1$，由定義得 $\mathrm{b}(1,1)=1$，而 (ii) 給出 $\mathrm{b}(2,1)=\frac{1}{2}$，與直接計算 $\int_0^1 x\,\mathrm{d}x$ 的結果吻合。
- 同樣取 $p=1$，第 (iii) 部分說 $\mathrm{b}(1,1)=\frac{1}{2}\,\mathrm{b}(1,\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\int_0^1(1-x)^{-1/2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cdot 2=1$。結果一致。
- 數值上，$3\pi/256\approx 0.036816$，而用電腦直接對 $t^{3/2}/(1+t)^6$ 在 $[0,\infty)$ 上作數值積分，結果在很多位小數上都吻合。再粗略檢查一下大小：被積函數在 $t=\frac{1}{3}$ 處達到峯值，約為 0.034，其「隆起」部分的寬度約為 1 的數量級，所以積分值為百分之幾是合理的。

常見錯誤

- 在 (iv) 中，忘記了 $\mathrm{d}x$ 帶來的因子 $(1+t)^{-2}$，結果得出錯誤的冪 $p+q-2$。
- 在 (iii) 中，只在 θ 的區間 $[0,\frac{1}{2}\pi]$ 上積分 $(\sin 2\theta)^{2p-1}$，卻忘記了 $\phi=2\theta$ 會令積分範圍加倍、並令 $\mathrm{d}\theta$ 減半。

► 在 (v) 中，把 p 對應到指數 $\frac{3}{2}$，而不是 $\frac{3}{2}+1$。

STEP 之外

函數 b(p,q) 就是歐拉（Euler）的 beta 函數（beta function），通常記作 $B(p,q)$。它與 gamma 函數（gamma function）的關係是 $B(p,q)=\Gamma(p)\Gamma(q)/\Gamma(p+q)$，而第 (iii) 部分的結果正是 Γ 的勒讓德（Legendre）倍元公式（duplication formula）的一種形式；利用 $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$，一行便可重新得出 $3\pi/256$。beta 函數在概率論中亦有出現，它是 beta 分佈（beta distribution）的歸一化常數（normalising constant）。想進一步了解這類積分，可參閱 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《數學進階難題》）；關於 beta 分佈，則可參閱 Blitzstein 與 Hwang 的 *Introduction to Probability*（《概率導論》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。