詳細解答

STEP II 2025，第 9 題

力學 • 碰撞與拋體

STEP II 2025，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2025 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

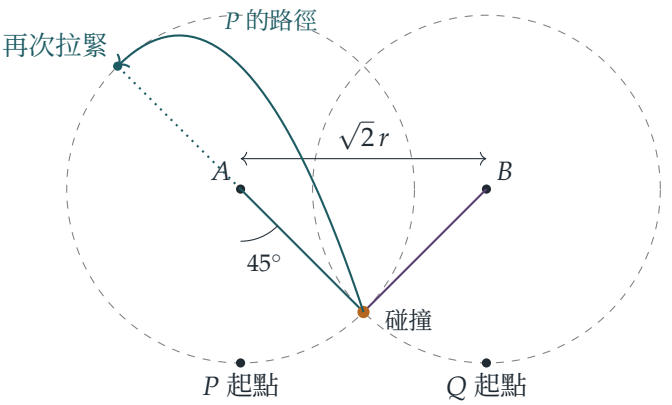
www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

關鍵思路

對稱性（symmetry）完成了大部分工作。兩質點必定在 AB 的垂直平分線（perpendicular bisector）上相遇，這就確定了它們碰撞時的位置和速率。碰撞剛結束時，每條繩子都會鬆弛，所以每個質點都只是普通的拋射體（projectile），直至它與懸點的距離回升至 r 為止。把這個距離條件寫出來，就得到一條關於 t 的四次方程（quartic）。三重根（triple root）有其物理意義：質點到達圓周時正沿着圓周運動，因此繩子拉緊時不會產生急扯。

解答

模型：P 和 Q 是質量為 m 的質點（在碰撞中視作細小光滑的球體），繩子輕而不可伸長，且沒有空氣阻力。設 P 在左方，懸於 A，並以 A 為原點取坐標軸，x 軸水平（指向 B），y 軸豎直向上。



上圖顯示在第 (iv) 部分的特殊情況下，P 在碰撞後的飛行軌跡：它在遠側、水平線以上 45° 的位置重新回到自己的圓周上。

第 (i) 部分

整個裝置關於 AB 的垂直平分線對稱，所以兩質點在這條線上相遇。此時每個質點都已從最低點水平移動了 $\frac{1}{2}\sqrt{2}\,r = r\sin 45°$，所以每條繩子與向下的豎直方向成 45°。每個質點上升了 $r - r\cos 45° = r\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$。到這一刻為止繩子都是拉緊的，而其張力 (tension) 不做功，所以由能量守恆（conservation of energy），碰撞前一刻的速率 v 滿足

$$v^2 = u^2 - 2gr\left(1 - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = u^2 - gr(2 - \sqrt{2}).$$

（兩質點要到達這裏，需要 $u^2 > gr(2-\sqrt{2})$。）

每個質點都沿着自己的圓周運動，與水平成 45°，所以

$$\text{速度：質點}P = \left(\tfrac{v}{\sqrt{2}}, \tfrac{v}{\sqrt{2}}\right), \qquad \text{速度：質點}Q = \left(-\tfrac{v}{\sqrt{2}}, \tfrac{v}{\sqrt{2}}\right).$$

兩質點在同一高度相遇，所以連心線（line of centres）是水平的，兩者之間的衝量（impulse）也是水平的。因此豎直分量保持不變。在水平方向上，兩者的動量大小相等、方向相反，所以碰撞前後的總動量都是零。於是由牛頓恢復定律（Newton's law of restitution），每個質點都以接近速率的 e 倍反彈。碰撞剛結束時，

$$\text{水平速率} = \frac{ev}{\sqrt{2}} = \tfrac{1}{2}ev\sqrt{2}, \qquad \text{豎直分量} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,v\text{（向上）}，$$

而 P 此時正向左運動，遠離 Q。

想一想 在碰撞期間，繩子會否也施加衝量？

不會。繩子只能拉，而且只能沿自身方向拉。碰撞剛結束時，P 相對於 A 位於 $\left(\frac{r}{\sqrt{2}}, -\frac{r}{\sqrt{2}}\right)$，速度為 $\left(-\frac{ev}{\sqrt{2}}, \frac{v}{\sqrt{2}}\right)$。它沿 $\overrightarrow{AP}$ 的分量是 $-\frac{1}{2}(1+e)v < 0$，所以 P 正向 A 運動。繩子立即鬆弛，因此從來不需要衝擊張力。

第 (ii) 部分

從碰撞時起計算 t。在繩子再次拉緊之前，P 是一個拋射體，所以相對於 A，

$$x = \frac{r}{\sqrt{2}} - \frac{ev}{\sqrt{2}}\,t, \qquad y = -\frac{r}{\sqrt{2}} + \frac{v}{\sqrt{2}}\,t - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

繩子拉緊的條件恰好是 $x^2 + y^2 = r^2$。乘以 2，使 $\sqrt{2}\,x$ 和 $\sqrt{2}\,y$ 出現，得

$$(r - evt)^2 + \left(-r + vt - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,gt^2\right)^2 = 2r^2.$$

這條式在 $t = 0$ 時成立，因為在碰撞那一刻繩子仍然拉緊，所以我們要找的時間是一個非零根。由對稱性，Q 在同一時刻發生同樣的情況。兩質點在水平方向上互相遠離，所以它們不可能先再次相撞。

第 (iii) 部分

展開並消去 $2r^2$：

$$\tfrac{1}{2}g^2t^4 - \sqrt{2}\,gv\,t^3 + \big((1+e^2)v^2 + \sqrt{2}\,rg\big)t^2 - 2(1+e)rv\,t = 0.$$

除以 $t \neq 0$ 後剩下一條三次方程（cubic）。現在

$$\frac{z}{c} = \frac{vt}{r}\cdot\frac{rg}{\sqrt{2}\,v^2} = \frac{gt}{\sqrt{2}\,v}, \qquad \text{所以} \qquad t = \frac{\sqrt{2}\,v}{g}\cdot\frac{z}{c}.$$

代入此式，並把整條三次方程除以 $\sqrt{2}\,v^3/g$。記 $w = z/c$，各項變為

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}g^2t^3 &\longrightarrow w^3,\\
-\sqrt{2}\,gv\,t^2 &\longrightarrow -2w^2,\\
\big((1+e^2)v^2 + \sqrt{2}\,rg\big)t &\longrightarrow \Big(1+e^2+\frac{\sqrt{2}\,rg}{v^2}\Big)w = \Big(\frac{2}{c}+1+e^2\Big)w,\\
-2(1+e)rv &\longrightarrow -\frac{\sqrt{2}\,rg}{v^2}(1+e) = -\frac{2}{c}(1+e),
\end{aligned}$$

其中用到 $\dfrac{2}{c} = \dfrac{2rg}{\sqrt{2}\,v^2} = \dfrac{\sqrt{2}\,rg}{v^2}$。這就是所求的方程

$$\Big(\frac{z}{c}\Big)^3 - 2\Big(\frac{z}{c}\Big)^2 + \Big(\frac{2}{c}+1+e^2\Big)\Big(\frac{z}{c}\Big) - \frac{2}{c}(1+e) = 0.$$

第 (iv) 部分

若關於 w 的三次方程有三重根 α，它必定是 $(w-\alpha)^3 = w^3 - 3\alpha w^2 + 3\alpha^2 w - \alpha^3$。比較係數，

$$3\alpha = 2, \qquad 3\alpha^2 = \frac{2}{c}+1+e^2, \qquad \alpha^3 = \frac{2}{c}(1+e).$$

所以 $\alpha = \frac{2}{3}$。記 $k = 2/c$。於是 $k = \frac{4}{3} - 1 - e^2 = \frac{1}{3} - e^2$，而最後一條方程變為

$$\Big(\tfrac{1}{3} - e^2\Big)(1+e) = \tfrac{8}{27} \iff 27e^3 + 27e^2 - 9e - 1 = 0 \iff (3e-1)(9e^2+12e+1) = 0.$$

二次因式的根是 $\frac{-2\pm\sqrt{3}}{3}$，兩者都是負數，所以不可能是恢復係數（coefficient of restitution）。因此 $e = \frac{1}{3}$。於是 $k = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$，所以 $c = 9$，並且

$$v^2 = \frac{c\,rg}{\sqrt{2}} = \frac{9rg}{\sqrt{2}} = \tfrac{9}{2}\sqrt{2}\,rg,$$

正如所求。

想一想 重根說明了運動的甚麼特點？

設 $D(t) = x^2 + y^2 - r^2$。除一個正因子外，D 等於 $w(w-\alpha)^3$。當 $0 < w < \alpha$ 時它是負數，所以在繩子拉緊之前，P 一直嚴格位於自己的圓內。由於 α 是重根（repeated root），在該處亦有 $D' = 0$。但 $D' = 2(x\dot{x} + y\dot{y})$，所以在那一刻，沿繩子方向的速度分量是零：質點到達時正沿着圓周運動。衝擊張力會沿繩子方向作用，只有在需要消除沿繩子方向的速度分量時才會出現。這裏沒有這樣的分量，所以沒有衝量，速度不變，也沒有動能損失。

第 (v) 部分

能量只在碰撞中損失。從碰撞到圓周最低點之間，只有重力做功：飛行期間沒有張力，拉緊時沒有急扯，之後張力又與運動方向垂直。碰撞剛結束時，速率的平方是

$$\frac{e^2 v^2}{2} + \frac{v^2}{2} = \frac{(1+e^2)v^2}{2},$$

而質點位於其最低點之上 $r\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 處。因此

$$\begin{aligned} U^2 &= \frac{(1+e^2)v^2}{2} + gr\left(2-\sqrt{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{9rg}{\sqrt{2}} + gr\left(2-\sqrt{2}\right) \\ &= \frac{5\sqrt{2}}{2}rg + (2-\sqrt{2})rg = \left(2+\tfrac{3}{2}\sqrt{2}\right)rg = \frac{4+3\sqrt{2}}{2}rg. \end{aligned}$$

我們還應檢查繩子在下擺途中一直保持拉緊。當 $w = \frac{2}{3}$ 時，$t = \frac{2\sqrt{2}v}{3g}$。代入後得位置 $\left(-\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}\right)$ 及速度 $\left(-\frac{v}{3\sqrt{2}}, -\frac{v}{3\sqrt{2}}\right)$。所以 P 在遠離 B 的一側、水平線以上 $45°$ 處重新回到自己的圓周上，速率的平方為 $\frac{v^2}{9} = \frac{rg}{\sqrt{2}}$。在該處沿指向 A 的方向分解，

$$T + mg\sin 45° = \frac{m}{r}\cdot\frac{rg}{\sqrt{2}} \quad\Longrightarrow\quad T = 0,$$

所以繩子拉緊時張力為零。當 P 向下擺動時，其速率增加，而重力向內的分量減少，所以此後 $T > 0$。質點沿圓周一直擺到最低點；若從這一點起用能量計算，也得到相同的 U^2 值：$\frac{rg}{\sqrt{2}} + 2gr\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(2+\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)rg$。

驗算

- 取 $r = 1$ 及 $g = 9.81$，以電腦逐步模擬飛行和圓周擺動，得 $U^2 \approx 40.430$。這與 $\frac{1}{2}(4+3\sqrt{2})g \approx 40.430$ 吻合，而且在整個擺動過程中張力一直非負。
- 求 U^2 的兩條途徑（從碰撞點出發，以及從繩子拉緊的位置出發）結果一致。
- 若 $e = 1/3$ 且 $c = 9$，則 $w^3 - 2w^2 + \frac{4}{3}w - \frac{8}{27} = \left(w - \frac{2}{3}\right)^3$ 準確成立。

常見錯誤

- 把上升的高度當作 $r\cos 45°$（即懸點以下的深度），而不是 $r - r\cos 45°$。
- 把恢復定律應用於整個速度。只有沿連心線的分量（這裏是水平分量）會受影響。
- 忘記排除關於 e 的三次方程的負根。

STEP 之外

重根條件表示兩條曲線（拋射體的拋物線和圓）以高階相切：它們相交、有共同的切線，而在這裏甚至有相同的曲率（curvature），這正是繩子拉緊時張力恰好為零的原因。接觸階（order of contact）和密切圓（osculating circle）會在大學一年級的曲線及微分幾何（differential geometry）課程中出現。衝擊約束（impulsive constraint）以及它們何時會耗散能量，是動力學中的標準課題。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）是看這些概念如何發展的好去處。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。