詳細解答

STEP II 2025，第 8 題

純數學 • 整數的平衡分拆

STEP II 2025，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2025 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

關鍵思路

把一個集合的每個元素都加上同一個數 c，其總和與平方和的變化是可以控制的：變化只取決於元素的個數、元素之和，（就平方而言）再無其他。因此，若兩個元素個數相同的集合，其總和與平方和已經相等，那麼把兩者各自平移一份再互相對調，便可構造出一個更大的平衡分割（balanced partition）。第 (ii) 部分正是這個想法背後的代數，第 (iii) 及 (iv) 部分則是它的兩個應用。

解答

第 (i) 部分

$1,2,\ldots,8$ 的總和是 36，它們的平方和是 204，所以每一半的總和須為 18，平方和須為 102。

把 8 放進 B。B 其餘三個元素的總和須為 10，平方和須為 $102-64=38$。由 1 至 7 中選出三個互不相同、總和為 10 的數，所得三元組為

$$\{1,2,7\},\ \{1,3,6\},\ \{1,4,5\},\ \{2,3,5\},$$

其平方和分別為 54、46、42 和 38。只有 $\{2,3,5\}$ 符合要求，所以

$$A=\{1,4,6,7\},\qquad B=\{2,3,5,8\}.$$

驗證：$1+4+6+7=18=2+3+5+8$，且 $1+16+36+49=102=4+9+25+64$。（以上搜尋亦顯示，除了對調 A 與 B 之外，這是唯一一個分成兩組各四個數的平衡分割。）

第 (ii) 部分

用二項式定理（binomial theorem）展開每個立方：

$$\sum_{k=1}^{m}(c+b_k)^3 = mc^3 + 3c^2\sum_{k=1}^{m} b_k + 3c\sum_{k=1}^{m} b_k^2 + \sum_{k=1}^{m} b_k^3,$$

以 a_k 代替 b_k 亦同理。因此

$$\begin{aligned}&\left(\sum a_k^3 + \sum(c+b_k)^3\right) - \left(\sum b_k^3 + \sum(c+a_k)^3\right)\\ &\qquad = 3c^2\left(\sum b_k - \sum a_k\right) + 3c\left(\sum b_k^2 - \sum a_k^2\right),\end{aligned}$$

因為 mc^3 項互相抵消，兩份 $\sum a_k^3$ 和兩份 $\sum b_k^3$ 亦然。根據假設，兩個括號都等於零，所以對每個實數 c，兩邊都相等，得證。

留意同樣的展開降低一次方便得到

$$\sum a_k^2 + \sum(c+b_k)^2 - \sum b_k^2 - \sum(c+a_k)^2 = 2c\left(\sum b_k - \sum a_k\right) = 0,$$

而對一次方則有 $\sum a_k + \sum(c+b_k) = \sum b_k + \sum(c+a_k)$，因為兩者都等於 $mc + \sum a_k + \sum b_k$。

第 (iii) 部分

取 (i) 中的平衡分割，令 a_k 依次取 $1,4,6,7$，b_k 依次取 $2,3,5,8$，並取 $c=8$。於是 $c+a_k$ 依次為 $9,12,14,15$，$c+b_k$ 依次為 $10,11,13,16$。設

$$A = \{1,4,6,7\}\cup\{10,11,13,16\}, \qquad B = \{2,3,5,8\}\cup\{9,12,14,15\}.$$

這兩個集合不相交（disjoint），各有 8 個元素，合起來正是 $\{1,2,\ldots,16\}$，因為 $\{1,\ldots,8\}$ 和 $\{9,\ldots,16\}$ 都分別被分到兩者之中。

> **想一想** 為甚麼要把 B 的平移副本放進 A，而不是把 A 的平移副本放進去？

因為這正是 (ii) 的模式：該處左邊是 $\sum a_k^3 + \sum(c+b_k)^3$，即我們的 A 的立方和；右邊則是我們的 B 的立方和。所以取 $c=8$ 代入 (ii)，便得到兩者的立方和相等。(ii) 末尾的兩條額外恆等式則給出總和相等及平方和相等，所以這個分割同樣是平衡的。

直接計算：兩半的總和都是 68，平方和都是 748，立方和都是 9248。

第 (iv) 部分

把 S 的元素寫成 $(n+k)^2$，其中 $k=0,1,\ldots,11$。對任何由 k 值組成的集合 K，

$$\sum_{k\in K}(n+k)^2 = |K|\,n^2 + 2n\sum_{k\in K} k + \sum_{k\in K} k^2.$$

所以，若把 $\{0,1,\ldots,11\}$ 分成兩個大小相同、總和相同、平方和亦相同的集合，則對應的平方數對每個 n 都會有相等的總和。

題目給出的 $\{1,\ldots,11\}$ 的分割，總和相等（各為 33），平方和亦相等（各為 253），但兩部分的大小分別是 6 和 5。把 $k=0$ 加進較小的部分便可解決這個問題：它使大小增加一，而對總和及平方和都沒有影響。所以我們採用

$$\{1,3,4,5,9,11\} \quad 及 \quad \{0,2,6,7,8,10\},$$

兩者大小都是 6，總和都是 33，平方和都是 253。因此

$$C=\{(n+1)^2,(n+3)^2,(n+4)^2,(n+5)^2,(n+9)^2,(n+11)^2\},$$
$$D=\{n^2,(n+2)^2,(n+6)^2,(n+7)^2,(n+8)^2,(n+10)^2\}$$

的元素總和都是 $6n^2+66n+253$。由於 $n>0$，這十二個平方數互不相同，所以 C 與 D 不相交，而且兩者的並集是 S。

驗算

- 在 (iv) 中取 $n=1$，得 $C=\{4,16,25,36,100,144\}$ 及 $D=\{1,9,49,64,81,121\}$，兩者總和都是 $325=6+66+253$。
- 在 (iii) 中，總和 68 及平方和 748 分別是 1 至 16 的總和 136 及平方和 1496 的一半；立方和 9248 則是 $136^2=18496$ 的一半。
- 用電腦搜尋從 $1,\ldots,8$ 中選出四個數的所有方法，確認了 (i) 中的分割在對調之下是唯一的；(iv) 的構造亦已對 n 直至 499 驗證過。

常見錯誤

- 在 (iv) 中直接使用題目給出的 A 和 B：兩者大小 6 與 5 不同，所以 n^2 項不會抵消。缺少的元素 n^2（即 $k=0$）必須歸入 B。
- 在 (iii) 中平移了錯誤的一半：把 $\{9,12,14,15\}$（即平移後的 a_k）與 $\{1,4,6,7\}$ 放在一起，總和與平方和仍然平衡，但立方和會相差 $2\left(\sum b_k^3-\sum a_k^3\right)=2(672-624)=96$。

STEP 之外

這就是 Prouhet–Tarry–Escott 問題：把一個整數集合分成兩部分，使兩者的 j 次方和對 $j=1,\ldots,k$ 都相等。以 $c=16,32,\ldots$ 重複 (iii) 中「平移再對調」的做法，便得到 $\{0,1,\ldots,2^{k+1}-1\}$ 的 Thue–Morse 分割，它使直至 k 次的所有方和都平衡；其證明就

是用歸納法（induction）重複 (ii) 的二項式展開。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算術》）是學習這類初等數論（elementary number theory）的好讀物。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。