詳細解答

STEP II 2025，第 7 題

純數學 • 非線性微分方程

STEP II 2025，第 7 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2025 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

關鍵思路

右邊的 $2x\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 恰好是 x^2 對 t 的導數（derivative），所以方程可以立即積分一次，得到一階方程 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x^2 + C$。初始條件決定 C，而三個部分正好對應 C 的三種可能符號：零、正和負。之後每個一階方程都可以分離變數（separation of variables），粒子的運動情況可以從公式讀出，甚至直接從 $x^2 + C$ 的符號看出來。

解答

積分一次

由於 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x^2\right) = 2x\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，方程即是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x^2\right), \qquad \text{所以} \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x^2 + C$$

其中 C 為常數。在 $t = 0$ 時 $x = a$，所以 C 等於初速度減去 a^2。在三個部分中，分別有 $C = 0$、$C = p^2$ 及 $C = -q^2$。

第 (i) 部分

此時 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x^2$。只要 $x \neq 0$，速度便是正數，所以 x 從 $a > 0$ 開始遞增，永遠不會到達 0；因此我們可以除以 x^2 並分離變數：

$$\int_a^x \frac{\mathrm{d}u}{u^2} = t \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{a} - \frac{1}{x} = t \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{a}{1 - at}.$$

當 t 從 0 增加至趨近 $\frac{1}{a}$ 時，粒子沿正方向移動，而且愈來愈快（其速度為 x^2），並且當 $t \to \frac{1}{a}$ 時 $x \to \infty$。粒子在有限時間 $\frac{1}{a}$ 內逃逸至無窮遠，而解在該時刻之後並不存在。

第 (ii) 部分

現在 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x^2 + p^2$，它恆為正數，所以可以分離變數：

$$\int_a^x \frac{\mathrm{d}u}{u^2+p^2} = t \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{p}\left(\arctan\frac{x}{p} - \arctan\frac{a}{p}\right) = t.$$

設 $\alpha = \arctan\dfrac{a}{p}$，由於 $a, p > 0$，它位於 $(0, \frac{\pi}{2})$ 之內，於是

$$x = p\tan\left(pt + \alpha\right).$$

此式在 $pt + \alpha < \frac{\pi}{2}$ 時成立。粒子同樣沿正方向移動，速率不斷增加，而當 $pt + \alpha \to \frac{\pi}{2}$ 時 $x \to \infty$，即當

$$t \to \frac{1}{p}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{a}{p}\right) = \frac{1}{p}\arctan\frac{p}{a},$$

這裏用到了當 $\theta > 0$ 時 $\arctan\theta + \arctan\frac{1}{\theta} = \frac{\pi}{2}$。所以粒子在有限時間內逃逸至無窮遠，而且比 (i) 更早，這正符合較大初速度的預期。

第 (iii) 部分

現在

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x^2 - q^2 = (x-q)(x+q).$$

在 $x = \pm q$ 處速度為零，所以這兩個位置是平衡點（equilibria）。$x^2 - q^2$ 的符號已經說明了一切：當 $x > q$ 時粒子向右移動，當 $-q < x < q$ 時向左移動。所以答案取決於 a 與 q 的大小比較。

利用部分分式（partial fractions）$\dfrac{1}{x^2-q^2} = \dfrac{1}{2q}\left(\dfrac{1}{x-q} - \dfrac{1}{x+q}\right)$ 分離變數：

$$\frac{1}{2q}\ln\left|\frac{x-q}{x+q}\right| = t + \text{常數}.$$

取指數，並以 $t = 0$ 時 $x = a$ 確定常數，可推想

$$\frac{x-q}{x+q} = Ke^{2qt}, \qquad K = \frac{a-q}{a+q}, \qquad \text{即} \qquad x = q\,\frac{1+Ke^{2qt}}{1-Ke^{2qt}}.$$

為確保各種情況下符號都正確，我們直接驗證。設 $E = Ke^{2qt}$，則 $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 2qE$。於是

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = q\cdot\frac{2\,\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}}{(1-E)^2} = \frac{4q^2E}{(1-E)^2}, \qquad x^2 - q^2 = q^2\,\frac{(1+E)^2-(1-E)^2}{(1-E)^2} = \frac{4q^2E}{(1-E)^2},$$

兩者相等。在 $t = 0$ 時，$1 + K = \frac{2a}{a+q}$ 而 $1 - K = \frac{2q}{a+q}$，所以 $x = q\cdot\frac{a}{q} = a$。因此只要 $1 - E \neq 0$，這條公式就是方程的解。注意由於 $a > 0$，有 $-1 < K < 1$。

情況 $a > q$。 此時 $0 < K < 1$，而 $E = Ke^{2qt}$ 從 K 開始遞增。粒子以正速度 $a^2 - q^2$ 出發，沿正方向移動，愈來愈快。當 $e^{2qt} = \frac{1}{K}$ 時分母 $1 - E$ 達到 0，所以

$$x \to \infty \quad \text{當} \quad t \to \frac{1}{2q} \ln \frac{a+q}{a-q}.$$

與 (i) 和 (ii) 一樣，粒子在有限時間內逃逸至無窮遠。

情況 $a = q$。 此時 $K = 0$，對所有 t 都有 $x = q = a$。初速度為 0，加速度 $2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 亦然：粒子在 $x = a$ 處保持靜止。

情況 $0 < a < q$。 此時 $-1 < K < 0$，所以 $E < 0$，而分母 $1 - E > 1$ 永不為零：解對所有 $t \geq 0$ 都存在。

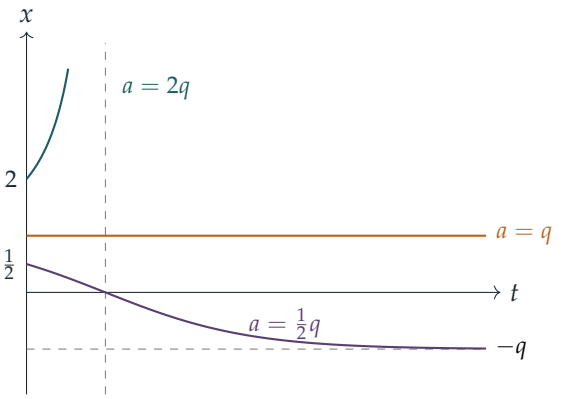
想一想 粒子會停在原點，還是穿過原點？它最終會到哪裏？

初速度 $a^2 - q^2$ 為負數，所以粒子沿負方向移動。當 $E = -1$，即 $t = \frac{1}{2q} \ln \frac{q+a}{q-a}$ 時，粒子位於原點，並且直接穿過，因為該處的速度是 $-q^2 \neq 0$。當 $t \to \infty$ 時，$E \to -\infty$，而

$$x = q\,\frac{1+E}{1-E} \to -q.$$

在整個過程中 $|x| < q$（因為當 $E < 0$ 時 $\frac{1+E}{1-E} \in (-1, 1)$），所以速度 $x^2 - q^2$ 一直保持負值：粒子穩定地向左移動，趨近 $x = -q$ 但永遠不會到達。它的速率 $q^2 - x^2$ 在經過原點時最大，為 q^2，之後逐漸減小至零。

以雙曲函數(hyperbolic functions)表示，這些解為：當 $a > q$ 時 $x = -q \coth\left(qt - \operatorname{arcoth} \frac{a}{q}\right)$，當 $a < q$ 時 $x = -q \tanh\left(qt - \operatorname{artanh} \frac{a}{q}\right)$。下圖展示 $q = 1$ 時的三種情況。



對於 $a = 2q$ 和 $a = \frac{1}{2}q$，特殊時刻 $\frac{1}{2q} \ln 3$（垂直虛線）分別是爆破時刻和穿過原點的時刻。

驗算

- 在 (ii) 中令 $p \to 0$：$p\tan(pt + \arctan\frac{a}{p}) \to \frac{a}{1-at}$ 及 $\frac{1}{p}\arctan\frac{p}{a} \to \frac{1}{a}$，與 (i) 吻合。在 (iii) 中 $a > q$ 的情況下令 $q \to 0$，結果亦相同。
- 對 $x = \frac{a}{1-at}$ 求導：$\dot{x} = \frac{a^2}{(1-at)^2} = x^2$ 及 $\ddot{x} = \frac{2a^3}{(1-at)^3} = 2x\dot{x}$。
- 以數值方法逐步推進原來的二階方程，例如取 $a = 0.5$、$q = 1.4$，得到 $t = 1$ 時 $x \approx -1.0814$，$t = 3$ 時 $x \approx -1.3987$，與公式相符；而粒子在 $t \approx 0.2669$ 時位於原點，正如預測。

常見錯誤

- 沒有察覺 $2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 是一個恰當導數，轉而嘗試如 $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 配合 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ 的代換；這方法可行，但較費時。
- 在 (iii) 中漏掉對數內的絕對值，以致當 $a < q$ 時得出錯誤的 K 符號。
- 遺漏平衡情況 $a = q$，或說粒子「停在 $-q$」，但其實它只是趨近該點。

STEP 之外

這裏看到的有限時間爆破（finite-time blow-up）是非線性方程的標誌：$\dot{x} = x^2$ 的右邊完全光滑，但其解只在有限時間內存在，這在線性方程中從不會發生。第 (iii) 部分是相線分析（phase-line analysis）的初步：平衡點 $x = q$（不穩定）和 $x = -q$（穩定）支配着整個運動，你甚至在求解之前就可以從 $x^2 - q^2$ 的符號預測其行為。Boyce 和 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）討論了這兩個概念，包括解的存在性與唯一性。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。