詳細解答

STEP II 2025，第 6 題

純數學 • 與拋物線相切的圓

STEP II 2025，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2025 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

關鍵思路

這裏所有圓的圓心都在 y 軸上，因此一切都關於 x 對稱（symmetric），而「在兩點相切」的意思就是在一對鏡像點 $(\pm x_0, y_0)$ 相切，其中 $x_0 \neq 0$。要刻畫相切（tangency），最簡單的方法是說兩者的法線（normal）一致：通往切點的半徑必須沿着另一曲線在該點的法線方向。一旦第 (i) 和第 (ii) 部分各自給出以圓心高度 a 表示 r^2 的公式，第 (iii) 部分就變成研究一條關於 a 的二次方程（quadratic equation），而它的兩個根（roots）正是 a_1 和 a_2。

解答

第 (i) 部分

設圓與拋物線（parabola）相切於 $P = (x_0, y_0)$，其中 $x_0 \neq 0$。（兩個不同的切點不可能都在對稱軸上，因為拋物線與 $x = 0$ 只相交於原點；而且由對稱性，若 (x_0, y_0) 是切點，則 $(-x_0, y_0)$ 也是。）

圓在 P 的法線沿着半徑方向 $(x_0,\, y_0 - a)$。把拋物線寫成 $2ky - x^2 = 0$，它的法線沿着梯度（gradient）方向 $(-2x_0,\, 2k)$。相切即表示這兩個向量平行：

$$x_0 \cdot 2k - (y_0 - a)(-2x_0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2x_0\,(k + y_0 - a) = 0.$$

由於 $x_0 \neq 0$，得 $y_0 = a - k$。由於 P 在拋物線上，$x_0^2 = 2ky_0 = 2k(a - k)$；又由於 P 在圓上，故

$$r^2 = x_0^2 + (y_0 - a)^2 = 2k(a - k) + k^2 = k(2a - k),$$

得證。

反過來，設 $a > k > 0$ 且 $r^2 = k(2a-k)$。令 $y_0 = a - k > 0$ 及 $x_0 = \sqrt{2k(a-k)} > 0$。按構造，$(\pm x_0, y_0)$ 都在拋物線上；又因 $x_0^2 + (y_0 - a)^2 = 2k(a-k) + k^2 = r^2$，它們也在圓上。在這兩點，法線 $(\pm x_0, -k)$ 與 $(\mp 2x_0, 2k)$ 平行，所以兩曲線在該處有公共切線。由於 $x_0 \neq 0$，圓與拋物線在兩個不同的點相切。

（作為交叉驗證，把 $x^2 = 2ky$ 代入圓的方程，得 $y^2 - 2(a-k)y + (a-k)^2 = 0$，即 $(y - (a-k))^2 = 0$：這是一個重根（repeated root），正是相切在代數上的標誌。）

第 (ii) 部分

直線 $y = c + x$，即 $x - y + c = 0$，與圓相切當且僅當它與圓心 $(0, a)$ 的距離等於 r：

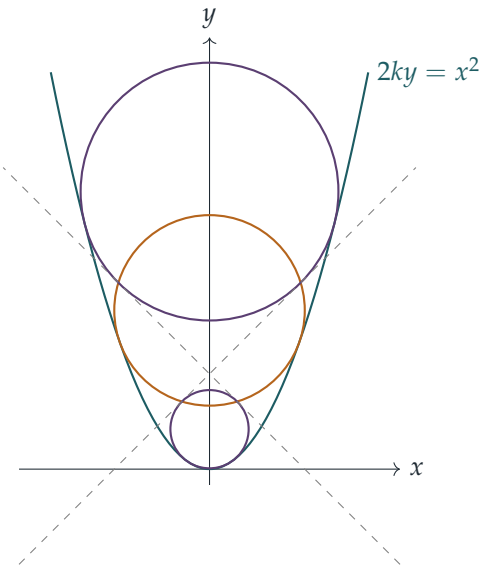
$$r = \frac{|0 - a + c|}{\sqrt{2}} \quad \Longrightarrow \quad r^2 = \frac{(a-c)^2}{2}.$$

直線 $y = c - x$ 是它關於 y 軸的鏡像，所以給出相同的條件。

切點就是從 $(0, a)$ 到直線的垂足（foot of the perpendicular）。半徑垂直於直線，故方向為 $(1, -1)$；從 $(0, a)$ 移動 $t(1, -1)$ 而落在 $y = c + x$ 上，得 $a - t = c + t$，所以 $t = \frac{a-c}{2}$。與 $y = c + x$ 的切點是

$$\left(\tfrac{a-c}{2},\ \tfrac{a+c}{2}\right),$$

而由對稱性，與 $y = c - x$ 的切點是 $\left(-\tfrac{a-c}{2},\ \tfrac{a+c}{2}\right)$。



$k = 1$、$c = 3$ 的情況：拋物線、與它相切的兩個圓 C_1、C_2（紫紅色）、直線 $y = 3 \pm x$（虛線），以及第 $(iii)(b)$ 部分的圓（琥珀色）。

第 (iii)(a) 部分

每個圓都與拋物線在兩點相切，所以由第 (i) 部分，$r_i^2 = k(2a_i - k)$；每個圓又與直線 $y = c \pm x$ 相切，所以由第 (ii) 部分，$r_i^2 = \frac{1}{2}(a_i - c)^2$。兩式相等，得

$$(a_i - c)^2 = 2k(2a_i - k) \quad \Longrightarrow \quad a_i^2 - 2(c + 2k)\, a_i + c^2 + 2k^2 = 0.$$

所以 a_1 和 a_2 都滿足二次方程 $a^2 - 2(c + 2k)a + c^2 + 2k^2 = 0$。由於 $a_1 \neq a_2$，它們正是這方程的兩個根，因此

$$a_1 + a_2 = 2c + 4k, \qquad a_1 a_2 = c^2 + 2k^2.$$

於是

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 &= (a_1 + a_2)^2 - 2a_1 a_2 \\ &= 4c^2 + 16kc + 16k^2 - 2c^2 - 4k^2 \\ &= 2c^2 + 16kc + 12k^2, \end{aligned}$$

(a) 得證。

第 (iii)(b) 部分

由第 (ii) 部分，C_i 上的切點是 $(\pm\frac{a_i - c}{2},\ \frac{a_i + c}{2})$。記 $u_i = a_i - c$ 會更整潔，這樣切點就是 $(\pm\frac{u_i}{2},\ c + \frac{u_i}{2})$。

> **想一想** 我們需要一個經過四點的圓，但只有 d 和 p 兩個未知數。怎樣才能在不明確解出 a_1 和 a_2 的情況下確定它們？

這四點是兩對鏡像點，而任何圓心在 y 軸上的圓都是對稱的，所以只需令圓經過 $u = u_1$ 及 $u = u_2$ 時的點 $(\frac{u}{2}, c + \frac{u}{2})$ 即可。這條件是

$$\frac{u^2}{4} + \left(c - d + \frac{u}{2}\right)^2 = p^2 \quad \Longleftrightarrow \quad u^2 + 2(c - d)\, u + 2(c - d)^2 - 2p^2 = 0. \qquad (*)$$

另一方面，把 $a = u + c$ 代入 (a) 中的二次方程，得

$$u^2 - 4k\, u + 2k^2 - 4kc = 0, \qquad (**)$$

它的根恰好是 u_1 和 u_2，而由於 $a_1 \neq a_2$，這兩個根不相等。圓經過全部四點，當且僅當 u_1 和 u_2 都是 $(*)$ 的根。兩個具有相同兩個相異根的首一 (monic) 二次多項式必然相同，所以與 $(**)$ 比較係數：

$$2(c - d) = -4k \quad \Longrightarrow \quad d = c + 2k,$$

然後 $2(c - d)^2 - 2p^2 = 8k^2 - 2p^2 = 2k^2 - 4kc$，所以

$$p^2 = 3k^2 + 2kc = k(3k + 2c).$$

第 (iii)(c) 部分

我們使用第 (i) 部分的逆命題（converse）。當 $d = c + 2k$ 時，

$$k(2d - k) = k(2c + 3k) = p^2,$$

所以這個圓正好具有 $r^2 = k(2a - k)$ 的形式，只是以 d 代替 a。剩下要驗證的是 $d > k$。

> **想一想** (a) 和 (b) 都沒有提及任何不等式，那麼像 $d > k$ 這樣的不等式（inequality）從何而來？

它來自 C_1 和 C_2 確實與拋物線在兩點相切這一事實。在第 (i) 部分，在兩點相切迫使切點滿足 $y_0 = a - k$ 且 $x_0^2 = 2k(a - k) > 0$（因為 $x_0 \neq 0$），所以 $a_1 > k$ 且 $a_2 > k$。把兩式相加並利用 (a)，

$$2c + 4k = a_1 + a_2 > 2k \quad \Longrightarrow \quad c > -k \quad \Longrightarrow \quad d = c + 2k > k.$$

所以 $d > k > 0$ 且 $p^2 = k(2d - k)$，由第 (i) 部分的後半，圓 $x^2 + (y - d)^2 = p^2$ 與拋物線 $2ky = x^2$ 在兩點相切，即 $(\pm\sqrt{2k(c + k)},\ c + k)$。

驗算

取 $k = 1$、$c = 3$（即上圖）。(a) 中的二次方程是 $a^2 - 10a + 11 = 0$，所以 $a = 5 \pm \sqrt{14} \approx 8.742$ 及 1.258。兩者之和為 $10 = 2c + 4k$，平方和為 $78 = 2 \cdot 9 + 16 \cdot 3 + 12$。(b) 給出 $d = 5$ 及 $p^2 = 9$。圓 $x^2 + (y - 5)^2 = 9$ 與 $2y = x^2$ 相交於 $2y + (y - 5)^2 = 9$，即 $(y - 4)^2 = 0$：在 $y = 4$ 有重根，所以兩者相切於 $(\pm 2\sqrt{2}, 4)$，與 (c) 的預測一致。四個切點中的每一個，例如 $(\frac{\sqrt{14}+2}{2}, \frac{\sqrt{14}+8}{2})$，與 $(0, 5)$ 的距離都是 3。所有結果也已用電腦對數以百計隨機選取的容許 k 和 c 值驗證過。

常見錯誤

- 在 (i) 中，忘記切點滿足 $x_0 \neq 0$。正是這一點讓我們可以除以 x_0，也正是它給出 $a > k$。
- 在 (iii)(a) 中，只用了 $r^2 = k(2a - k)$ 或只用了 $r^2 = \frac{1}{2}(a - c)^2$。關於 a 的二次方程來自兩者同時成立。
- 在 (iii)(c) 中，驗證了 $p^2 = k(2d - k)$ 卻沒有驗證 $d > k$。沒有這一點，這個「圓」可能只在原點相切，甚至完全不相切。

STEP 之外

由第 (i) 部分，圓心在 y 軸上且與拋物線兩度相切的圓是 $x^2 + y^2 - k^2 - 2a(y - k) = 0$：一條關於參數 a 為線性的方程。這樣的一族圓稱為圓束（pencil of circles，又稱共軸圓系（coaxal system）），而 C_1、C_2 以及 (b) 中的圓都屬於這一族。比對法線是邁向曲線之間接觸（contact）這一概念的第一步；與曲線達到二階接觸的圓就是它的曲率圓（circle of curvature），這會在曲線微分幾何（differential geometry of curves）的入門課程中遇到。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《數學進階問題》）收錄了許多同一風格、STEP 式的坐標幾何題目。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。