詳細解答

STEP II 2025，第 5 題

純數學 • 代換積分法

STEP II 2025，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2025 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

關鍵思路

這裏每個積分（integral）的範圍都是由 0 到 ∞，而形如 $x = u^{-m}$ 的代換（substitution）會把 $[0, \infty)$ 映射到自身，只是兩端互換了。$\mathrm{d}x$ 帶來的負號會抵消上下限的互換，所以我們得到的仍然是一個在 $[0, \infty)$ 上的積分。如果新的被積函數（integrand）正好是原來的負數，那麼這個積分等於它自己的相反數，因此為零。如果新的被積函數是另一個形狀相同的被積函數的倍數，我們就得到兩個積分之間的關係，而毋須計算任何一個積分。在第 (iii) 及第 (iv) 部分，我們把指數（exponent）保留為一般形式，再選取它的值，使 u 的冪互相抵消。

解答

在整個解答中，若 $x = u^{-m}$ 且 $m > 0$，則當 $u \to \infty$ 時 $x \to 0$，而當 $u \to 0$ 時 $x \to \infty$，所以

$$\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\infty^0 f(u^{-m})\,(-mu^{-m-1})\,\mathrm{d}u = \int_0^\infty f(u^{-m})\,mu^{-m-1}\,\mathrm{d}u.$$

我們會先在 $m = 1$ 及 $m = 2$ 的情況下使用這個結果，然後再用於一般的 m。

第 (i) 部分

把該積分記為 I，並設 $x = u^{-1}$；把上下限重新排好次序後，$\mathrm{d}x \to u^{-2}\,\mathrm{d}u$。對 $u > 0$，

$$x(x^3+1) = \frac{1}{u}\cdot\frac{1+u^3}{u^3} = \frac{u^3+1}{u^4}, \qquad \text{所以} \qquad \sqrt{x(x^3+1)} = \frac{\sqrt{u^3+1}}{u^2},$$

而且

$$\sqrt{x} - 1 = \frac{1}{\sqrt{u}} - 1 = \frac{1-\sqrt{u}}{\sqrt{u}}.$$

因此

$$I = \int_0^\infty \frac{1-\sqrt{u}}{\sqrt{u}} \cdot \frac{u^2}{\sqrt{u^3+1}} \cdot \frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u = \int_0^\infty \frac{1-\sqrt{u}}{\sqrt{u(u^3+1)}}\,\mathrm{d}u$$
$$= -\int_0^\infty \frac{\sqrt{u}-1}{\sqrt{u(u^3+1)}}\,\mathrm{d}u = -I.$$

由於變量叫甚麼名字並不重要，最後那個積分其實又是 I。所以 $2I = 0$，得 $I = 0$，正如所求。

注意，這並不表示被積函數為零。它在 $(0,1)$ 上是負的，在 $(1,\infty)$ 上是正的，而代換令這兩部分面積恰好互相抵消。

第 (ii) 部分

現在設 $x = u^{-2}$；重新排好上下限後，$\mathrm{d}x \to 2u^{-3}\,\mathrm{d}u$。對 $u > 0$，

$$x^3+1 = u^{-6}+1 = \frac{1+u^6}{u^6}, \qquad \sqrt{x^3+1} = \frac{\sqrt{u^6+1}}{u^3}.$$

因此

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3+1}} = \int_0^\infty \frac{u^3}{\sqrt{u^6+1}} \cdot \frac{2}{u^3}\,\mathrm{d}u = 2\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^6+1}},$$

把 u 改名為 x 後，這就是所求的結果。

第 (iii) 部分

第 (i) 部分是 $s = 1$、$p = 3$、$r = \frac{1}{2}$ 的情況，所以我們用字母重複同一方法。把該積分記為 J，並設 $x = u^{-1}$：

$$x^s(x^p+1) = u^{-s} \cdot \frac{1+u^p}{u^p} = \frac{u^p+1}{u^{s+p}}, \qquad \text{所以} \qquad \sqrt{x^s(x^p+1)} = u^{-(s+p)/2}\sqrt{u^p+1},$$

同時 $x^r - 1 = (1-u^r)/u^r$。所以

$$J = \int_0^\infty \frac{(1-u^r)\,u^{-r}\,u^{(s+p)/2}\,u^{-2}}{\sqrt{u^p+1}}\,\mathrm{d}u = -\int_0^\infty \frac{(u^r-1)\,u^{(s+p)/2-r-2}}{\sqrt{u^p+1}}\,\mathrm{d}u.$$

把它與寫成以下形式的 J 本身比較：

$$J = \int_0^\infty \frac{(u^r-1)\,u^{-s/2}}{\sqrt{u^p+1}}\,\mathrm{d}u.$$

想一想 為甚麼只需令 u 的冪相符，而不用計算任何東西？

如果兩個 u 的冪相同，代換就會把 J 變成 $-J$，於是正如第 (i) 部分一樣得 $J = 0$。所以我們需要

$$\frac{s+p}{2} - r - 2 = -\frac{s}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad r = s + \frac{p}{2} - 2.$$

取這個 r 值，便有 $J = -J$，所以 $J = 0$。（題目告訴我們 p 和 s 使這些積分收斂（converge），而論證 $J = -J \Rightarrow J = 0$ 所需要的就只是這一點。）驗算一下：$s = 1$ 和 $p = 3$ 給出 $r = 1 + \frac{3}{2} - 2 = \frac{1}{2}$，這正是第 (i) 部分。

第 (iv) 部分

第 (ii) 部分是 $k = 2$、$p = 3$、$q = 6$ 的情況，而它來自 $x = u^{-2}$。所以我們嘗試 $x = u^{-m}$，其中 $m > 0$，使 $\mathrm{d}x \to mu^{-m-1}\,\mathrm{d}u$：由於 $x^p + 1 = (1 + u^{mp})/u^{mp}$，

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^p + 1}} = m \int_0^\infty \frac{u^{mp/2}\, u^{-m-1}}{\sqrt{u^{mp} + 1}}\,\mathrm{d}u.$$

多出來的 u 的冪會在以下情況消失：

$$\frac{mp}{2} = m + 1 \quad \Longleftrightarrow \quad p = 2 + \frac{2}{m},$$

此時右方為 $m \displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^q + 1}}$，其中 $q = mp = 2m + 2$。

現在取 $m = k$。對任何 $k > 0$，選取

$$p = 2 + \frac{2}{k}, \qquad q = 2k + 2$$

便得到

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^p + 1}} = k \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^q + 1}}.$$

由於 $k > 0$，兩個指數都大於 2。這正是這些積分收斂的條件，因為當 x 很大時，被積函數的表現與 $x^{-p/2}$ 相若。所以我們的關係式中的積分都存在。取 $k = 2$ 便重新得到第 (ii) 部分的 $p = 3$、$q = 6$，而 $k = 1$ 則給出平凡情況 $p = q = 4$。

驗算

- 數值上，$\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3 + 1}} \approx 2.8044$，而 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^6 + 1}} \approx 1.4022$，恰好是一半，與第 (ii) 部分所說的一致。
- 第 (i) 部分的積分在機器精度內計算出來為零，儘管負的貢獻主要來自 $x = 0$ 附近，而正的貢獻則稀疏地分佈在 $(1, \infty)$ 上。
- 對隨機選取的容許 p 和 s，以電腦驗算第 (iii) 部分的積分，在 $r = s + \frac{p}{2} - 2$ 時得到零。把 r 改變 0.3，則得到明顯非零的值。
- 對 $k = \frac{1}{2}$（即 $p = 6$、$q = 3$），第 (iv) 部分的關係式就是把第 (ii) 部分倒過來讀，理應如此。

常見錯誤

- 忘記代換會互換上下限。$\mathrm{d}x$ 帶來的負號與倒轉的上下限互相抵消，漏掉其中任何一個，都會令第 (i) 部分的符號出錯。
- 在第 (iii) 部分處理一般的冪時，寫成 $\sqrt{u^{-s}} = u^{-s}/2$，而不是 $u^{-s/2}$。
- 在第 (iv) 部分，只對某個特定的 k 找出一對 (p,q)，而不是把 p 和 q 寫成適用於每個 $k > 0$ 的函數。

STEP 之外

這些積分全都可以求出閉式（closed form）。代換 $t = x^p/(1+x^p)$ 會把 $\int_0^\infty (1+x^p)^{-1/2}\,\mathrm{d}x$ 變成 $\frac{1}{p}\,\mathrm{B}\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)$，其中 B 是歐拉（Euler）的 Beta 函數（Beta function）。再配合 Gamma 函數（Gamma function），就可以明確寫出第 (iv) 部分中的比值。利用對稱 $x \mapsto 1/x$ 把一個積分變成它自己的相反數，這個技巧在分析（analysis）和圍道積分（contour integration）中一再出現。若想仔細學習反常積分（improper integrals），包括我們在此可以略過的收斂問題，可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。若想看更多 STEP 風格的代換技巧，可參閱 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《數學進階問題》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。