詳細解答

STEP II 2025，第 4 題

純數學 • 下取整函數恆等式

STEP II 2025，第 4 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2025 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

關鍵思路

一切都建基於一個事實：$\lfloor x \rfloor = m$ 的意思恰恰是 m 為整數，且 $m \leq x < m+1$。第 (i) 部分說明，整數平移可以直接穿過下取整函數（floor function）。有了這一點，便會發現 f_n 是以 $\frac{1}{n}$ 為週期的週期函數（periodic function），因此我們只需在一個短區間上研究它，而在該區間上每一項都很容易計算。第 (iii) 部分其實是 $n = 2$ 的情況換了個樣子出現，它使無窮級數可以伸縮相消（telescope）。

解答

第 (i) 部分

設 $m = \lfloor x \rfloor$，則 m 為整數，且 $m \leq x < m+1$。各邊加上整數 n，得

$$m + n \leq x + n < (m + n) + 1.$$

由於 $m+n$ 是整數，它就是不超過 $x+n$ 的最大整數。所以 $\lfloor x+n \rfloor = m+n = \lfloor x \rfloor + n$，得證。

第 (ii)(a) 部分

記 $\mathrm{f}_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \lfloor x + \frac{k}{n} \rfloor - \lfloor nx \rfloor$。把 x 換成 $x + \frac{1}{n}$，和式中每一項都會向後移一位：

$$\mathrm{f}_n\left(x + \tfrac{1}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor x + \tfrac{k}{n} \right\rfloor - \lfloor nx + 1 \rfloor.$$

和式的最後一項是 $\lfloor x+1\rfloor = \lfloor x\rfloor + 1$，而 $\lfloor nx+1\rfloor = \lfloor nx\rfloor + 1$，兩者都由第 (i) 部分取 $n=1$ 得出。所以

$$\mathrm{f}_n\left(x+\tfrac{1}{n}\right) = \lfloor x\rfloor + 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left\lfloor x+\tfrac{k}{n}\right\rfloor - \lfloor nx\rfloor - 1 = \mathrm{f}_n(x).$$

第 (ii)(b) 部分

設 $0 \le t < \frac{1}{n}$。對於 $0 \le k \le n-1$，

$$0 \le t + \tfrac{k}{n} < \tfrac{1}{n} + \tfrac{n-1}{n} = 1,$$

因此 $\lfloor t+\frac{k}{n}\rfloor = 0$。此外 $0 \le nt < 1$，所以 $\lfloor nt\rfloor = 0$。每一項都是零，因此 $\mathrm{f}_n(t) = 0$。

第 (ii)(c) 部分

> ? **想一想** (a) 部分只讓我們每次向上移 $\frac{1}{n}$。那麼，位於 $[0, \frac{1}{n})$ 下方的 x 要怎樣才能到達？

在點 $x-\frac{1}{n}$ 應用 (a)，得 $\mathrm{f}_n(x) = \mathrm{f}_n(x-\frac{1}{n})$，所以我們既可以向上移，也可以向下移。由歸納法（induction），對每個整數 m（無論正負），都有 $\mathrm{f}_n(x+\frac{m}{n}) = \mathrm{f}_n(x)$。

現在任取實數 x，並設 $m = \lfloor nx\rfloor$，則 $m \le nx < m+1$。令 $t = x - \frac{m}{n}$。各邊除以 $n > 0$，得 $0 \le t < \frac{1}{n}$。因此由 (b)，

$$\mathrm{f}_n(x) = \mathrm{f}_n\left(t+\tfrac{m}{n}\right) = \mathrm{f}_n(t) = 0$$

成立。所以對所有 x 都有 $\mathrm{f}_n(x) = 0$，這就是恆等式

$$\lfloor x\rfloor + \left\lfloor x+\tfrac{1}{n}\right\rfloor + \cdots + \left\lfloor x+\tfrac{n-1}{n}\right\rfloor = \lfloor nx\rfloor.$$

第 (iii)(a) 部分

在 (ii)(c) 中取 $n=2$，並在 $\frac{x}{2}$ 處求值：

$$0 = \mathrm{f}_2\left(\tfrac{x}{2}\right) = \left\lfloor \tfrac{x}{2}\right\rfloor + \left\lfloor \tfrac{x}{2}+\tfrac{1}{2}\right\rfloor - \left\lfloor 2\cdot\tfrac{x}{2}\right\rfloor,$$

移項整理即得 $\lfloor \frac{x}{2}\rfloor + \lfloor \frac{x+1}{2}\rfloor = \lfloor x\rfloor$。

第 (iii)(b) 部分

> **想一想** (iii)(a) 裏只有一個孤零零的 $+1$，它怎樣幫助我們處理 $\left\lfloor \frac{x+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor$ 這一項？

把分子和分母同時除以 2^k。設 $y = x/2^k$，則

$$\left\lfloor \frac{x+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{y+1}{2} \right\rfloor = \lfloor y \rfloor - \left\lfloor \frac{y}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{2^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{2^{k+1}} \right\rfloor,$$

這裏用了 (iii)(a)，並以 y 代替 x。所以 $k = 0, 1, \ldots, K$ 各項之和會伸縮相消：

$$S_K = \sum_{k=0}^{K} \left\lfloor \frac{x+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor - \left\lfloor \frac{x}{2^{K+1}} \right\rfloor.$$

當 $K \to \infty$ 時，$x/2^{K+1} \to 0$，而答案取決於它從 0 的哪一側趨近。

- 若 $x \geq 0$：一旦 $2^{K+1} > x$，便有 $0 \leq x/2^{K+1} < 1$，所以最後的取整值為 0，此後 $S_K = \lfloor x \rfloor$。
- 若 $x < 0$：一旦 $2^{K+1} \geq -x$，便有 $-1 \leq x/2^{K+1} < 0$，所以最後的取整值為 -1，此後 $S_K = \lfloor x \rfloor + 1$。

無論哪種情況，都只有有限多項不為零，因此該無窮級數為

$$\left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+2}{2^2} \right\rfloor + \cdots = \begin{cases} \lfloor x \rfloor, & x \geq 0, \\ \lfloor x \rfloor + 1, & x < 0. \end{cases}$$

當 x 為非負整數時，和就是 x。

驗算

試取 $x = 7$。各項為 $\lfloor 4 \rfloor = 4$、$\lfloor \frac{9}{4} \rfloor = 2$、$\lfloor \frac{11}{8} \rfloor = 1$、$\lfloor \frac{15}{16} \rfloor = 0$，之後每一項都是 0。它們的和是 $7 = \lfloor 7 \rfloor$。再試 $x = -\frac{5}{2}$：各項為 $\lfloor -\frac{3}{4} \rfloor = -1$、$\lfloor -\frac{1}{8} \rfloor = -1$、$\lfloor \frac{3}{16} \rfloor = 0$，如此類推。和為 $-2 = \lfloor -\frac{5}{2} \rfloor + 1$，證實負數的情況確實不同。至於 (ii)，取 $n = 3$、$x = 1.5$，得 $1 + 1 + 2 = 4 = \lfloor 4.5 \rfloor$。用電腦對兩萬個隨機有理數 x 及 $1 \leq n \leq 30$ 的各個值作檢驗，題中每一條恆等式以及伸縮相消後的部分和都得到證實。

常見錯誤

- 在 (ii)(c) 中只用 (a) 向上移，這樣只涵蓋了 $x \geq 0$，對負數 x 則甚麼也沒有說明。
- 在 (iii)(b) 中假設對所有 x 都有 $\lfloor x/2^{K+1} \rfloor \to 0$。對於負數 x，它最終停留在 -1，而不是 0。

- 在 a 和 b 都不是整數時寫 $\lfloor a+b \rfloor = \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor$。第 (i) 部分正正就是容許這樣寫的情況。

STEP 之外

(ii)(c) 中的恆等式就是埃爾米特恆等式（Hermite's identity）。它屬於一系列在初等數論（elementary number theory）中佔核心地位的取整函數結果，例如勒讓德（Legendre）公式 $\sum_{k\geq 1} \lfloor N/p^k \rfloor$，它給出整除 $N!$ 的質數 p 的最高次冪。(iii)(b) 中的和也在數算某樣東西：對正整數 x，第 k 項就是從 1 到 x 之間能被 2^k 整除但不能被 2^{k+1} 整除的整數個數，而每個整數都恰好被數一次。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算術》）是觀察這些思想如何實際運用的好去處。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。