詳細解答

STEP II 2025，第 3 題

純數學 • 冪的比較

STEP II 2025，第 3 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2025 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

關鍵思路

每個形如 a^b 與 b^a 的比較（其中 $a, b > 0$），在取對數（logarithm）並除以 ab 之後，都會變成 $\frac{\ln a}{a}$ 與 $\frac{\ln b}{b}$ 的比較。因此一切都歸結到 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 的圖像：它上升至 $x = \mathrm{e}$ 處的唯一峯值，然後下降。位於 e 同一側的兩個數很容易比較；位於兩側的兩個數則需要一塊「踏腳石」，例如 $f(2) = f(4)$ 這個巧妙的巧合。

解答

全文中，對 $x > 0$ 記 $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$。由於 ln 是遞增的，對正數 a, b 有

$$a^b > b^a \iff b\ln a > a\ln b \iff \frac{\ln a}{a} > \frac{\ln b}{b} \iff f(a) > f(b),$$

其中我們除以了 $ab > 0$。每一部分都會用到這個轉換。

第 (i) 部分

由商法則（quotient rule），

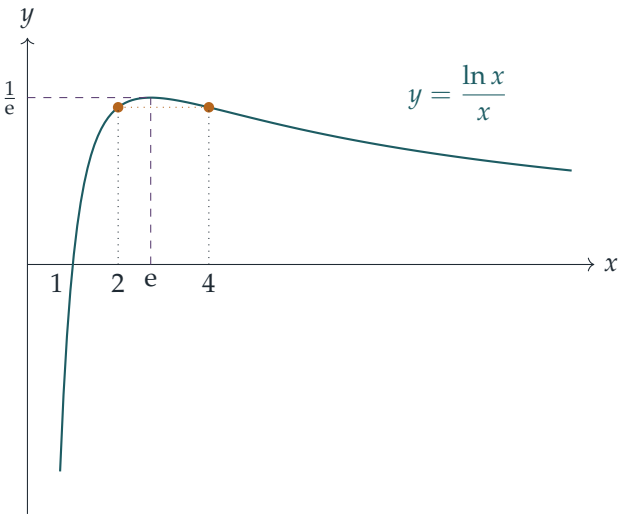
$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2},$$

它在 $0 < x < \mathrm{e}$ 時為正，在 $x > \mathrm{e}$ 時為負。因此 f 在 $(0, \mathrm{e}]$ 上嚴格遞增（strictly increasing），在 $[\mathrm{e}, \infty)$ 上嚴格遞減，最大值為 $f(\mathrm{e}) = 1/\mathrm{e}$。

其他特徵：

- $f(1) = 0$；在 $(0,1)$ 上 $f < 0$，在 $(1, \infty)$ 上 $f > 0$。

- 當 $x \to 0^+$ 時，$\ln x \to -\infty$ 而 $1/x \to +\infty$，故 $f(x) \to -\infty$：y 軸是一條漸近線（asymptote）。
- 當 $x \to \infty$ 時，由於 $\ln x$ 的增長比 x 慢，$f(x) \to 0^+$：x 軸是一條漸近線。
- 再求導一次得 $f''(x) = \dfrac{2\ln x - 3}{x^3}$，因此在 $x = \mathrm{e}^{3/2} \approx 4.48$ 處有一個拐點（point of inflection）。



琥珀色的點標示 $f(2) = \frac{\ln 2}{2} = \frac{2\ln 2}{4} = f(4)$，我們將在第 (iii) 部分用到。

第 (ii) 部分

(a) 由上述轉換，$3^\pi > \pi^3 \iff f(3) > f(\pi)$。3 與 π 都大於 e，而 f 在 $[\mathrm{e}, \infty)$ 上嚴格遞減；由於 $3 < \pi$，得 $f(3) > f(\pi)$，故 $3^\pi > \pi^3$。

(b) 這裏的不等式是 $\left(\frac{9}{4}\right)^{\sqrt{5}} > \sqrt{5}^{\,9/4}$，它等價於 $f\left(\frac{9}{4}\right) > f(\sqrt{5})$。現在兩個數都小於 e：事實上 $\sqrt{5} < \frac{9}{4} = 2.25 < \mathrm{e}$，其中 $\sqrt{5} < \frac{9}{4}$ 是因為 $5 < \frac{81}{16}$。在 $(0, \mathrm{e}]$ 上函數 f 嚴格遞增，所以較大的輸入給出較大的值：$f\left(\frac{9}{4}\right) > f(\sqrt{5})$，得證。

第 (iii) 部分

取 $a = x$ 及 $b = x + 2$，轉換給出

$$x^{x+2} > (x+2)^x \iff f(x) > f(x+2).$$

對於 $1 < x < 2$，有 $x \in (1,2)$ 及 $x + 2 \in (3,4)$，兩者分處 e 的兩側，因此我們需要一塊踏腳石。

想一想 怎樣比較 f 在 e 左邊某點的值與 f 在其右邊某點的值？

利用穿過兩個琥珀色點的水平線。由於 $1 < x < 2 < \mathrm{e}$ 且 f 在該處遞增，$f(x) < f(2)$。由於 $\mathrm{e} < x+2 < 4$ 且 f 在該處遞減，$f(x+2) > f(4)$。又 $f(2) = f(4)$，因此

$$f(x) < f(2) = f(4) < f(x+2).$$

故 $f(x) < f(x+2)$，所以 $(x+2)^x$ 較大：對 $(1,2)$ 中的每個 x，都有 $(x+2)^x > x^{x+2}$。

第 (iv) 部分

把第一個不等式的兩邊分別改寫為 3 的冪和 $2\sqrt{2}$ 的冪：

$$9^{\sqrt{2}} = \left(3^2\right)^{\sqrt{2}} = 3^{2\sqrt{2}}, \qquad \sqrt{2}^{9} = \left(\sqrt{2}^{3}\right)^{3} = \left(2\sqrt{2}\right)^{3}.$$

因此兩個不等式的左邊完全相同，右邊也完全相同；它們是同一個命題，因此等價。

由轉換，$3^{2\sqrt{2}} > (2\sqrt{2})^3 \iff f(3) > f(2\sqrt{2})$。由 $\mathrm{e}^2 < 8$ 得 $\mathrm{e} < \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$（取正平方根），又由於 $8 < 9$，有 $2\sqrt{2} < 3$。因此

$$\mathrm{e} < 2\sqrt{2} < 3,$$

而由於 f 在 $[\mathrm{e}, \infty)$ 上嚴格遞減，$f(2\sqrt{2}) > f(3)$。所以 $(2\sqrt{2})^3 > 3^{2\sqrt{2}}$，即

$$\sqrt{2}^{9} > 9^{\sqrt{2}}: \quad \text{較大的是} \sqrt{2}^{9}.$$

第 (v) 部分

設 $a = \sqrt[3]{3}$。我們要比較 8^a 與 a^8，即比較 $f(8)$ 與 $f(a)$。由於 $a < 2 < \mathrm{e} < 8$，兩個輸入再次位於峯值的兩側，而且它們的值原來很接近（$f(a) \approx 0.254$，$f(8) \approx 0.260$），因此我們需要比第 (iii) 部分的技巧更精細的方法。

想一想 能否用 f 在較簡單的點上的值來表示 $f(a)$ 及 $f(8)$？

有用的恆等式是 $f(x^k) = \dfrac{k \ln x}{x^k}$。它給出

$$f(a) = \frac{\frac{1}{3}\ln 3}{a} = \frac{f(3)}{a}, \qquad f(8) = \frac{3\ln 2}{8} = \frac{3}{4}f(2), \qquad f(2\sqrt{2}) = \frac{\frac{3}{2}\ln 2}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}}f(2).$$

由第 (iv) 部分，$f(3) < f(2\sqrt{2})$。兩邊除以 $a > 0$，

$$f(a) = \frac{f(3)}{a} < \frac{f(2\sqrt{2})}{a} = \frac{3f(2)}{2\sqrt{2}\,a}.$$

最後，$a = 3^{1/3} > 2^{1/2} = \sqrt{2}$，因為把兩邊同時取六次方得 $9 > 8$。因此 $2\sqrt{2}a > 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 4$，又由於 $f(2) > 0$，

$$f(a) < \frac{3f(2)}{2\sqrt{2}a} < \frac{3f(2)}{4} = f(8).$$

所以 $f(8) > f(a)$，由轉換即 $8^a > a^8$：較大的是 $8^{\sqrt[3]{3}}$。

驗算

數值上，$3^\pi \approx 31.54$ 對 $\pi^3 \approx 31.01$；$\left(\frac{9}{4}\right)^{\sqrt{5}} \approx 6.131$ 對 $\sqrt{5}^{9/4} \approx 6.114$；在 $x = 1.5$ 時，$1.5^{3.5} \approx 4.13$ 對 $3.5^{1.5} \approx 6.55$；$9^{\sqrt{2}} \approx 22.36$ 對 $\sqrt{2}^9 \approx 22.63$；以及 $8^{\sqrt[3]{3}} \approx 20.07$ 對 $\sqrt[3]{3}^8 \approx 18.72$。全部與上述結論一致。在 (ii) 和 (iv) 中差距很小，這正是需要用圖像論證而非粗略估算的原因。用電腦在 $(1,2)$ 中 10^5 個隨機點檢驗第 (iii) 部分，沒有發現任何例外。

常見錯誤

- 比較 f 在 e 兩側的兩點時，當作 f 是單調（monotonic）的那樣處理。在 (iii) 和 (v) 中，踏腳石是必不可少的。
- 忘記把 $b\ln a > a\ln b$ 除以 ab 時不等號方向不變，只是因為 $ab > 0$。
- 在 (ii)(b) 中，沒有說明 $\frac{9}{4}$ 與 $\sqrt{5}$ 哪個較大，或沒有說明兩者都小於 e。

STEP 之外

方程 $a^b = b^a$ 在 $a \neq b$ 時正正就是 $f(a) = f(b)$，而每條水平線 $y = c$（其中 $0 < c < 1/\mathrm{e}$）都與圖像相交兩次。其中 $a < b$ 的解可參數化為 $a = (1+\frac{1}{t})^t$、$b = (1+\frac{1}{t})^{t+1}$，其中 $t > 0$；取 $t = 1$ 得 $(2,4)$，這是唯一一對這樣的正整數。當 $t \to \infty$ 時兩者都趨向 e，這是大學一年級分析（analysis）中的標準極限之一。關於這類論證背後的單調性與均值定理（mean value theorem）的嚴謹處理，可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。