詳細解答

STEP II 2025，第 2 題

純數學 • 含模的複數方程

STEP II 2025，第 2 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2025 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

關鍵思路

設 $z = x + \mathrm{i}y$，然後把方程拆成實部（real part）和虛部（imaginary part）。模（modulus）必定是實數，所以它對虛部毫無貢獻；而 z^2（或 z^3）的虛部隨即可以因式分解。這個因式分解告訴我們，根必定落在阿根圖（Argand diagram）中的哪幾條直線上；在每條直線上，問題就化為一個單變量的實方程。

解答

第 (i) 部分

(a) 設 $z = x + \mathrm{i}y$，其中 x, y 為實數。於是 $z^2 = x^2 - y^2 + 2xy\,\mathrm{i}$，而 $|z + b|$ 是實數，a 亦然。比較 $z^2 + |z + b| = a$ 兩邊的虛部，得

$$2xy = 0,$$

所以 $x = 0$（此時 z 為純虛數（purely imaginary））或 $y = 0$（此時 z 為純實數）。這正是所要證明的。

(b) 假設 $z = \mathrm{i}y$，其中 y 為實數。那麼 $z^2 = -y^2$，且 $|z + \frac{5}{2}| = \sqrt{y^2 + \frac{25}{4}}$，因此需要

$$\sqrt{y^2 + \tfrac{25}{4}} = y^2 + \tfrac{7}{2}.$$

兩邊皆為正數，所以這等價於平方後的方程

$$y^2 + \tfrac{25}{4} = y^4 + 7y^2 + \tfrac{49}{4} \quad \Longleftrightarrow \quad y^4 + 6y^2 + 6 = 0.$$

對任何實數 y，左邊至少為 6，所以無解：方程沒有純虛根。

(c) 假設 $z = x$ 為實數，則需要 $x^2 + |x + \frac{7}{2}| = \frac{5}{2}$。我們按 $x + \frac{7}{2}$ 的正負號分情況討論。

- 若 $x \geq -\frac{7}{2}$：$x^2 + x + \frac{7}{2} = \frac{5}{2}$，即 $x^2 + x + 1 = 0$，其判別式（discriminant）為 $1 - 4 = -3 < 0$。沒有實數解。
- 若 $x < -\frac{7}{2}$：$x^2 - x - \frac{7}{2} = \frac{5}{2}$，即 $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2) = 0$。根 3 和 -2 都不滿足條件 $x < -\frac{7}{2}$，所以兩者都不是解。

因此方程沒有純實根。

> **想一想** 為甚麼解出 $x^2 - x - 6 = 0$ 就停下來是不夠的？

每種情況只在其各自的 x 範圍內描述原方程。若情況方程的某個根落在該範圍之外，它解的其實是另一條方程（模內符號錯了的那條），所以必須捨去。

(d) 現在 $\frac{1}{2} < b < \frac{3}{4}$；特別地，$b > 0$。

*虛根。*設 $z = \mathrm{i}y$，並記 $Y = y^2 \geq 0$。方程變為 $-Y + \sqrt{Y + b^2} = \frac{1}{2}$，即

$$\sqrt{Y + b^2} = Y + \tfrac{1}{2}.$$

當 $Y \geq 0$ 時右邊為正，所以平方後得到等價的方程：

$$Y + b^2 = Y^2 + Y + \tfrac{1}{4} \quad \Longleftrightarrow \quad Y^2 = b^2 - \tfrac{1}{4}.$$

由於 $b > \frac{1}{2}$，有 $b^2 - \frac{1}{4} > 0$，所以 $Y = \sqrt{b^2 - \frac{1}{4}}$ 確實是一個正值，於是

$$z = \pm \mathrm{i} \left(b^2 - \tfrac{1}{4}\right)^{1/4}$$

是純虛根。

*實根。*設 $z = x$，並尋找滿足 $x \geq -b$ 的根，此時 $|x + b| = x + b$。方程變為

$$x^2 + x + b - \tfrac{1}{2} = 0,$$

其判別式為 $1 - 4(b - \frac{1}{2}) = 3 - 4b$，由於 $b < \frac{3}{4}$，它是正數。取較大的根

$$x_+ = \frac{-1 + \sqrt{3 - 4b}}{2}.$$

我們必須驗證它落在範圍 $x \geq -b$ 之內。$x_+ \geq -b$ 等價於 $\sqrt{3 - 4b} \geq 1 - 2b$，而這必然成立，因為 $b > \frac{1}{2}$ 使右邊為負，而左邊為正。所以 x_+ 是一個純實根。

因此當 $\frac{1}{2} < b < \frac{3}{4}$ 時，方程至少有一個純虛根和至少一個純實根，得證。（關於 b 的每個條件都恰好派上用場：$b > \frac{1}{2}$ 用於虛根及 $x_+ \geq -b$，$b < \frac{3}{4}$ 用於實根的判別式。）

第 (ii) 部分

設 $z = x + \mathrm{i}y$。那麼

$$z^3 = x^3 - 3xy^2 + \left(3x^2y - y^3\right)\mathrm{i}, \qquad |z+2|^2 = (x+2)^2 + y^2.$$

後者是實數，所以方程的虛部為

$$y\left(3x^2 - y^2\right) = 0,$$

得 $y = 0$ 或 $y^2 = 3x^2$。（從幾何角度看，z 位於實軸或直線 $y = \pm\sqrt{3}\,x$ 之一上：這些正是輻角為 $\frac{\pi}{3}$ 的倍數的方向，亦即使 z^3 為實數的方向。）

情況 $y = 0$。由實部得 $x^3 + (x+2)^2 = 4$，即

$$x^3 + x^2 + 4x = x\left(x^2 + x + 4\right) = 0.$$

該二次式的判別式為 $1 - 16 < 0$，所以唯一的解是 $x = 0$，即 $z = 0$。

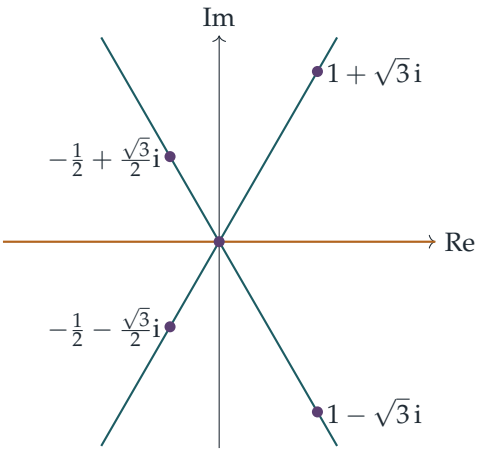
情況 $y^2 = 3x^2$。把 $y^2 = 3x^2$ 代入實部 $x^3 - 3xy^2 + (x+2)^2 + y^2 = 4$：

$$\begin{aligned} x^3 - 9x^3 + x^2 + 4x + 4 + 3x^2 &= 4 \\ -8x^3 + 4x^2 + 4x &= 0 \\ -4x\left(2x^2 - x - 1\right) &= 0 \\ -4x(2x+1)(x-1) &= 0. \end{aligned}$$

- $x = 0$ 迫使 $y = 0$：這又是 $z = 0$。
- $x = 1$ 給出 $y^2 = 3$，所以 $z = 1 \pm \sqrt{3}\,\mathrm{i}$。
- $x = -\frac{1}{2}$ 給出 $y^2 = \frac{3}{4}$，所以 $z = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}$。

每一步都是等價變換（我們只是代入和因式分解），所以以上全部確實都是解。因此方程恰好有五個根：

$$z = 0, \qquad z = 1 \pm \sqrt{3}\,\mathrm{i}, \qquad z = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}.$$



這些根都落在虛部所容許的三條直線 $y=0$ 和 $y=\pm\sqrt{3}\,x$ 上。

驗算

- 以極式(polar form)表示，$1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$，所以 $z^3=8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}=-8$，而 $|3+\sqrt{3}\,\mathrm{i}|^2=9+3=12$；果然 $-8+12=4$。
- $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}$ 是單位立方根 (cube root of unity)，所以 $z^3=1$，而 $|\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}|^2=\frac{9}{4}+\frac{3}{4}=3$；果然 $1+3=4$。
- 在 (d) 中試取 $b=\frac{5}{8}$：則 $Y=\sqrt{\frac{25}{64}-\frac{16}{64}}=\frac{3}{8}$，且 $-\frac{3}{8}+\sqrt{\frac{3}{8}+\frac{25}{64}}=-\frac{3}{8}+\frac{7}{8}=\frac{1}{2}$。實根為 $x_+=\frac{-1+\sqrt{1/2}}{2}\approx-0.146$，正如所需，它大於 $-\frac{5}{8}$。
- 以電腦在整個區域 $|x|,|y|\le 3$ 內搜尋第 (ii) 部分方程的根，找到的恰好是上述五個根。

常見錯誤

- 把 $|z+b|$ 當作有虛部，或把 $|z+2|^2$ 展開成 $(z+2)^2$。模的平方是 $(x+2)^2+y^2$，是一個實數。
- 忘記檢查情況方程的根是否落在該情況適用的範圍內，如 (c) 和 (d)。
- 在 (ii) 中把虛部除以 y，因而漏掉實根 $z=0$。

STEP 之外

混合了 z 與 $|z|$（或與 $\bar{z}$）的方程並不是 z 的多項式方程，所以代數基本定理（fundamental theorem of algebra）對它們有多少個根毫無說明：這裏一條「三次」方程竟有五個根。正確的看法是把它們視為兩個實未知數的一對實方程。你會在大學一年級的複分析（complex analysis）中再次遇到這個觀點：一個函數只有在僅依賴 z 而不依賴 $\bar{z}$ 時，才是複意義下可微的（這就是柯西－黎曼方程（Cauchy–Riemann equations），柯西（Cauchy）、黎曼（Riemann））。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直觀複分析》）把這幅幾何圖像描繪得栩栩如生。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。