詳細解答

STEP II 2025，第 12 題

概率與統計 • 泊松分佈

> **STEP II 2025，第 12 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2025 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

關鍵思路

對於泊松分佈（Poisson distribution），相鄰兩項概率的比有簡單的形式 $p_r/p_{r-1} = \lambda/r$，因此每一個差（difference）d_r 都可以寫成某個已知概率乘以一個關於 r 的簡單有理因子。d_r 的正負號告訴我們 p_r 在哪裏上升、在哪裏下降；再深入一層，二階差分（second difference）$d_{r+1} - d_r$ 的正負號告訴我們 d_r 在哪裏上升、在哪裏下降，而這個正負號由一個關於 r 的二次式（quadratic）決定。那個看似古怪的數 $\lambda + \frac{1}{2} + \sqrt{\lambda + \frac{1}{4}}$，其實只不過是該二次式的一個根（再加一）。

解答

全文中 $p_r = \mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^r/r!$，所以當 $r \geq 1$ 時

$$p_r = \frac{\lambda}{r}\, p_{r-1}, \qquad p_{r-1} = \frac{r}{\lambda}\, p_r,$$

而且每個 p_r 都嚴格為正。

第 (i) 部分

當 $r \geq 1$ 時，

$$d_r = p_r - p_{r-1} = p_{r-1}\left(\frac{\lambda}{r} - 1\right) = \frac{p_{r-1}}{r}\,(\lambda - r).$$

由於 $p_{r-1}/r > 0$，d_r 的正負號與 $\lambda - r$ 的正負號相同；又因為 λ 不是整數，d_r 永不為零。設 $m = \lfloor \lambda \rfloor$，即小於 λ 的最大整數，於是 $\lambda - 1 < m < \lambda$（由於 $\lambda \notin \mathbb{Z}$，兩個不等式（inequality）都是嚴格的）。那麼

- 當 $1 \leq r \leq m$ 時，$r < \lambda$，所以 $d_r > 0$，且 $p_0 < p_1 < \cdots < p_m$；

► 當 $r \geq m+1$ 時，$r > \lambda$，所以 $d_r < 0$，且 $p_m > p_{m+1} > p_{m+2} > \cdots$。

（若 $\lambda < 1$，則 $m = 0$，第一組為空。）因此對每個 $r \neq m$ 都有 $p_r < p_m$：m 是唯一的最可能取值，而且 $\lambda - 1 < m < \lambda$。

第 (ii) 部分

現在看看 d_r 本身如何變化。當 $r \geq 1$ 時，設 $e_r = d_{r+1} - d_r = p_{r+1} - 2p_r + p_{r-1}$。把所有項都用 p_r 表示，

$$e_r = p_r\left(\frac{\lambda}{r+1} - 2 + \frac{r}{\lambda}\right) = \frac{p_r}{\lambda(r+1)}\Big(\lambda^2 - 2\lambda(r+1) + r(r+1)\Big).$$

前面的因子為正，所以 e_r 的正負號與下式相同：

$$Q(r) = r^2 + (1-2\lambda)r + \lambda^2 - 2\lambda.$$

這個二次式的判別式（discriminant）是 $(1-2\lambda)^2 - 4(\lambda^2 - 2\lambda) = 1 + 4\lambda$，所以它的根是

$$\alpha = \lambda - \tfrac{1}{2} - \sqrt{\lambda + \tfrac{1}{4}}, \qquad \beta = \lambda - \tfrac{1}{2} + \sqrt{\lambda + \tfrac{1}{4}},$$

而 $Q(r) < 0$ 恰好當 $\alpha < r < \beta$。因此

$$d_{r+1} < d_r \iff \alpha < r < \beta, \qquad d_{r+1} > d_r \iff r < \alpha \text{ 或 } r > \beta.$$

注意 $\beta + 1 = \lambda + \frac{1}{2} + \sqrt{\lambda + \frac{1}{4}}$ 不是整數，所以 β 也不是整數，而 $k = \lfloor \beta + 1 \rfloor = \lfloor \beta \rfloor + 1$ 正是滿足下式的整數：

$$k < \lambda + \tfrac{1}{2} + \sqrt{\lambda + \tfrac{1}{4}} < k + 1.$$

? **想一想** 既然 $r < \alpha$ 時 d_r 也是遞增的，我們到底應該在哪裏尋找 d_r 的最小值？

由第 (i) 部分，$r < \lambda$ 時 $d_r > 0$，$r > \lambda$ 時 $d_r < 0$，所以最小值必定在負項之中，即 $r \geq m+1$。此外 $\beta > \lambda$（因為 $\sqrt{\lambda + \frac{1}{4}} > \frac{1}{2}$）而 $\alpha < \lambda$，所以每個 $r \geq m+1$ 都滿足 $r > \alpha$；而由 $k > \beta > \lambda$ 可得 $k \geq m+1$。因此在整數 $r \geq m+1$ 上：

► 當 $m+1 \leq r \leq k-1$ 時：$r < \beta$，所以 $e_r < 0$，得 $d_{m+1} > d_{m+2} > \cdots > d_k$；

► 當 $r \geq k$ 時：$r > \beta$，所以 $e_r > 0$，得 $d_k < d_{k+1} < d_{k+2} < \cdots$。

（當 $k = m+1$ 時，第一組為空。）所以 d_k 嚴格小於其他每一個負的 d_r，當然也小於所有正項。d_r 的最小值出現在 $r = k$，正如所求。換言之：p_r 在 $r = k-1$ 與 $r = k$ 之間下降得最陡。

第 (iii) 部分

首先，若 $\lambda < 1$，則由第 (i) 部分，每個 d_r 都是負數。但當 $r \to \infty$ 時 $d_r \to 0$（因為 $p_r \to 0$），所以對任何 r，總有後面的某一項比 d_r 大：最大值根本無法取得，更不會在 $r = 1$ 取得。因此我們需要 $\lambda > 1$（由於 λ 不是整數，$\lambda = 1$ 已被排除）。

現設 $\lambda > 1$，於是 $d_1 > 0$。正項為 $d_1, \ldots, d_m$，任何最大值都在它們之中。

- 若最大值在 $r = 1$，則 $d_2 < d_1$，即 $e_1 < 0$。
- 反之，若 $e_1 < 0$，則 $\alpha < 1 < \beta$，所以每個滿足 $1 \leq r < \beta$ 的整數 r 都有 $e_r < 0$。由於 $m < \lambda < \beta$，得 $d_1 > d_2 > \cdots > d_m$，而其後各項都是負數。所以最大值在 $r = 1$。

因此，當 $\lambda > 1$ 時，最大值在 $r = 1$ 恰好當 $e_1 < 0$，即當 $Q(1) < 0$：

$$Q(1) = 1 + 1 - 2\lambda + \lambda^2 - 2\lambda = \lambda^2 - 4\lambda + 2 < 0 \iff 2 - \sqrt{2} < \lambda < 2 + \sqrt{2}.$$

結合 $\lambda > 1$（以及 $2 - \sqrt{2} < 1$），條件為

$$1 < \lambda < 2 + \sqrt{2}.$$

第 (iv) 部分

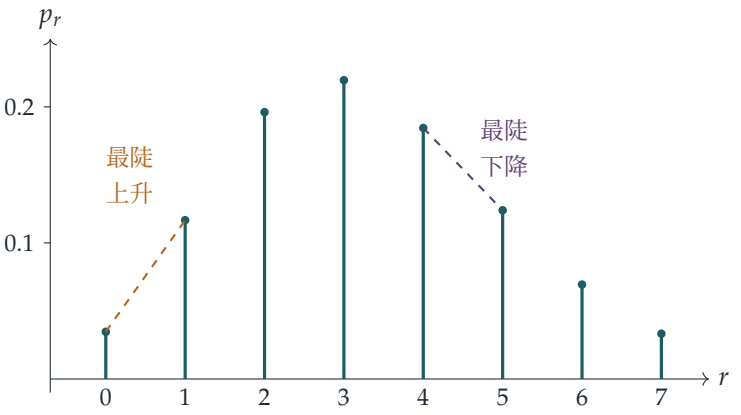
當 $\lambda = 3.36$ 時，$\lambda + \frac{1}{4} = 3.61 = 1.9^2$，所以：

- 由第 (i) 部分，眾數（mode）是 $m = 3$；
- $\lambda + \frac{1}{2} + \sqrt{\lambda + \frac{1}{4}} = 3.86 + 1.9 = 5.76$，所以 $k = 5$：最陡的下降是由 p_4 到 p_5；
- $1 < 3.36 < 2 + \sqrt{2} \approx 3.41$，所以最陡的上升是由 p_0 到 p_1（只是剛剛好：$\alpha = 0.96$ 很接近 1，所以 d_1 與 d_2 幾乎相等）。

利用 $p_r = \frac{3.36}{r} p_{r-1}$ 及 $p_0 = \mathrm{e}^{-3.36} \approx 0.035$，得出近似值

$$p_0, \ldots, p_7 \approx 0.035,\ 0.117,\ 0.196,\ 0.220,\ 0.185,\ 0.124,\ 0.069,\ 0.033.$$

草圖應顯示：一開始就急升，然後逐漸平緩，在 $r = 3$ 達到峯值；隨後下降越來越陡，在 $r = 4$ 與 $r = 5$ 之間最陡，之後再漸趨平緩。



驗算

- 對 20,000 個隨機的 $\lambda \in (0, 40)$ 計算 p_r 及 d_r，證實眾數是 $\lfloor \lambda \rfloor$，d_r 的最小值在 $\lfloor \lambda + \frac{1}{2} + \sqrt{\lambda + \frac{1}{4}} \rfloor$，而且（當 $\lambda > 1$ 時）d_r 的最大值在 $r = 1$ 恰好當 $\lambda < 2 + \sqrt{2} \approx 3.414$。
- 當 $\lambda = 3.36$：$d_1 \approx 0.0820$ 而 $d_2 \approx 0.0794$，所以 d_1（以些微之差）是最大的；$d_4, d_5, d_6 \approx -0.035, -0.061, -0.055$，所以 d_5 是最小的，與預測一致。
- 小的 λ：當 $\lambda \to 0$ 時，$\lambda + \frac{1}{2} + \sqrt{\lambda + \frac{1}{4}} \to 1$，所以 $k = 1$。事實上，此時幾乎所有概率都集中在 0，最大的下降就是第一個，即 $p_1 - p_0$。

常見錯誤

- 忘記 d_r 在 $r < \alpha$ 時也是遞增的，因而沒有解釋為何最小值不可能在該區域（那是 $d_r > 0$ 的區域）。
- 在第 (iii) 部分只檢查 $d_2 < d_1$，而漏掉 $\lambda < 1$ 的情況——此時每個 d_r 都是負數，數列根本取不到最大值。
- 寫成 $\lambda - 1 \leq m \leq \lambda$：正正因為 λ 不是整數，這些不等式才是嚴格的。

STEP 之外

差 d_r 與 e_r 是一階及二階導數（derivative）的離散版本，而 k 標示了泊松分佈的一個離散「拐點」（point of inflection）。當 λ 很大時，泊松分佈近似於平均值為 λ、標準差（standard deviation）為 $\sqrt{\lambda}$ 的正態分佈（normal distribution），而後者的拐點位於 $\lambda \pm \sqrt{\lambda}$；可與這裏的 $\alpha, \beta \approx \lambda \pm \sqrt{\lambda}$ 比較。利用比值 p_r / p_{r-1} 的技巧是求離散分佈眾數的標準方法，在 Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》），或

Blitzstein 與 Hwang 的 *Introduction to Probability*（《概率導論》）中有更深入的探討。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。