詳細解答

STEP II 2025，第 11 題

概率與統計 • 期望值與二項式求和

STEP II 2025，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2025 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

關鍵思路

兩個遊戲都在第一次擲出 $2k$ 時結束，所以兩者都可以寫成對擲骰次數 r 的求和。Ali 的和近似幾何級數（geometric series），而第 (i) 部分正是計算擲骰次數期望值（expected value）所需的工具。至於 Zen，一局勝出的遊戲由 $2k$ 之前出現了哪些數字決定，因為一旦知道這個集合，遞增的次序就隨之確定。數算這些集合會引入二項式係數（binomial coefficients），所以這個和就是第 (iii) 部分的那個和。

解答

第 (i) 部分

當 $|x| < 1$ 時，幾何級數給出

$$\sum_{r=0}^{\infty} x^r = \frac{1}{1-x}.$$

冪級數（power series）在其收斂區間（interval of convergence）內可以逐項微分（differentiate term by term），因此兩邊對 x 求導，得

$$\sum_{r=1}^{\infty} r x^{r-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \qquad |x| < 1,$$

即為所求。

第 (ii) 部分

每一次擲骰的結果可分為三類：

$$\mathrm{P}(\text{擲出}2k) = \frac{1}{2k}, \qquad \mathrm{P}(\text{偶數，但不是}2k) = \frac{k-1}{2k}, \qquad \mathrm{P}(\text{奇數}) = \frac{1}{2}.$$

設 R 為擲骰次數。Ali 以 $R = r$ 勝出，當且僅當第 $1, \ldots, r-1$ 次擲出的都是 $2k$ 以外的偶數，而第 r 次擲出 $2k$。各次擲骰互相獨立（independent），所以設 $x = \dfrac{k-1}{2k}$，便有

$$\mathrm{P}(\text{Ali 勝出且} R = r) = \frac{1}{2k}\, x^{r-1}.$$

(a) 對幾何級數求和（注意 $0 \le x < 1$）：

$$\mathrm{P}(\text{Ali 勝出}) = \frac{1}{2k} \cdot \frac{1}{1-x} = \frac{1}{2k} \cdot \frac{2k}{k+1} = \frac{1}{k+1}.$$

這個結果有一個快捷的看法。$2k$ 以外的偶數不影響結果，可以不理會。遊戲的勝負取決於奇數和 $2k$ 哪一個先出現。共有 k 個奇數面和一個 $2k$ 面，出現機會均等，所以 $2k$ 先出現的概率是 $\frac{1}{k+1}$。

(b) 若 Ali 以 $R = r$ 勝出，他賺得 £r，否則一無所得，所以由第 (i) 部分，

$$\mathrm{E}(\text{Ali 的收入}) = \sum_{r=1}^{\infty} r \cdot \frac{1}{2k}\, x^{r-1} = \frac{1}{2k} \cdot \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{2k}\left(\frac{2k}{k+1}\right)^2 = \frac{2k}{(k+1)^2} \text{ 英鎊.}$$

第 (iii) 部分

把該表達式記為 S。它的通項是 $(r+1)\binom{n}{r}x^r$，其中 $r = 0, 1, \ldots, n$。因子 $r+1$ 提示我們對 x^{r+1} 求導：

$$S = \sum_{r=0}^{n} (r+1)\binom{n}{r} x^r = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}x^{r+1}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(x(1+x)^n\Big),$$

這裏用了二項式定理（binomial theorem）。由乘積法則（product rule），

$$S = (1+x)^n + nx(1+x)^{n-1} = (1+x)^{n-1}(1+(n+1)x).$$

第 (iv) 部分

假設 Zen 恰好擲了 r 次而勝出。最後一次擲出 $2k$，而首 $r-1$ 次擲出的是取自 $\{1, 2, \ldots, 2k-1\}$ 的嚴格遞增（strictly increasing）的數。（無論如何它們都必須小於 $2k$，因為遊戲在第一次擲出 $2k$ 時便停止。）

想一想 長度為 r 的勝出序列有多少個？

一個嚴格遞增序列，只要知道其中出現了哪些數，便完全確定，因為把一組互不相同的數按遞增次序排列只有一種方法。所以長度為 r 的勝出序列與 $\{1, \ldots, 2k-1\}$ 的 $(r-1)$ 元子集（subset）一一對應。這樣的子集共有 $\binom{2k-1}{r-1}$ 個，且 $1 \le r \le 2k$。

每一個特定的 r 次擲骰序列的概率都是 $\left(\frac{1}{2k}\right)^r$。因此

$$\mathrm{E}(\text{Zen 的收入}) = \sum_{r=1}^{2k} r\binom{2k-1}{r-1}\left(\frac{1}{2k}\right)^r = \frac{1}{2k}\sum_{j=0}^{2k-1}(j+1)\binom{2k-1}{j}\left(\frac{1}{2k}\right)^j,$$

其中 $j = r-1$。這正是第 (iii) 部分中 $n = 2k-1$、$x = \frac{1}{2k}$ 時的和，此時 $1+(n+1)x = 1+2k\cdot\frac{1}{2k} = 2$。所以

$$\text{E(Zen 的收入)} = \frac{1}{2k}\left(1+\frac{1}{2k}\right)^{2k-2}\cdot 2 = \frac{1}{k}\left(1+\frac{1}{2k}\right)^{2k-2} \quad \text{英鎊.}$$

第 (v) 部分

把 Zen 的預期收入除以 Ali 的預期收入：

$$\rho = \frac{1}{k}\left(1+\frac{1}{2k}\right)^{2k-2}\cdot\frac{(k+1)^2}{2k} = \frac{(k+1)^2}{2k^2}\cdot\frac{\left(1+\frac{1}{2k}\right)^{2k}}{\left(1+\frac{1}{2k}\right)^{2}}.$$

現在設 k 很大。那麼

- $\dfrac{(k+1)^2}{k^2} = \left(1+\dfrac{1}{k}\right)^2 \approx 1$；
- $\left(1+\dfrac{1}{2k}\right)^2 \approx 1$；
- 由題目給出的近似式，取 $n = 2k$，得 $\left(1+\dfrac{1}{2k}\right)^{2k} \approx \mathrm{e}$。

所以

$$\rho \approx \frac{\mathrm{e}}{2} \approx \frac{2.71828}{2} = 1.359\ldots,$$

即當 k 很大時，Zen 的預期收入約為 Ali 的 1.359 倍，也就是多出稍高於 35%，即為所求。

驗算

- 當 $k = 1$ 時，骰子就是一枚兩面為 1, 2 的硬幣。Ali 只有在第一次擲出 2 時才勝出，概率為 $\frac{1}{2} = \frac{1}{k+1}$，此時賺得 £1，所以預期收入為 $\frac{1}{2} = \frac{2k}{(k+1)^2}$。Zen 以序列 2（概率 $\frac{1}{2}$，賺得 £1）和 1, 2（概率 $\frac{1}{4}$，賺得 £2）勝出，所以她的預期收入是 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$。公式與此吻合：$k = 1$ 時指數 $2k-2$ 為 0，所以公式給出 $\frac{1}{1}\cdot 1 = 1$。
- 當 $k = 3$ 時，Ali 的預期收入是 $\frac{3}{8}$，Zen 的是 $\frac{1}{3}\left(\frac{7}{6}\right)^4 = \frac{2401}{3888} \approx 0.618$。兩者都與直接列舉所有勝出序列的結果相符，也與遊戲的電腦模擬結果相符。
- 比率 ρ 在 $k = 10$ 時約為 1.456，在 $k = 100$ 時約為 1.369，在 $k = 10^4$ 時約為 1.3592。它遞減趨向 $\mathrm{e}/2 = 1.35914\ldots$。

常見錯誤

- 在第 (iv) 部分用階乘去數有序序列，而不是數子集。每個集合只有一種遞增排列。
- 忘記 Zen 遊戲中較早的擲骰不能包含 $2k$。這使範圍變成 $\{1,\ldots,2k-1\}$，所以 $n = 2k-1$，而不是 $2k$。
- 在第 (ii) 部分把繼續遊戲的概率寫成 $\frac{k}{2k}$，而不是 $\frac{k-1}{2k}$。擲出 $2k$ 雖然是偶數，但它會結束遊戲。

STEP 之外

第 (iii) 部分是生成函數（generating functions）的一個小例子：把一個數列編碼為一個冪級數的係數，然後對這個級數運用微積分。概率生成函數（probability generating functions）把這個想法更進一步。若 $G(s) = \mathrm{E}(s^X)$，則 $\mathrm{E}(X) = G'(1)$，這正是本題兩次用到的求導技巧。極限 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to \mathrm{e}$ 在概率論中隨處可見，例如以泊松分佈近似二項分佈（Poisson approximation to the binomial）。Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）有一章很好地講解生成函數。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。