詳細解答

STEP II 2025，第 10 題

力學 • 剛桿的靜力學

STEP II 2025，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2025 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

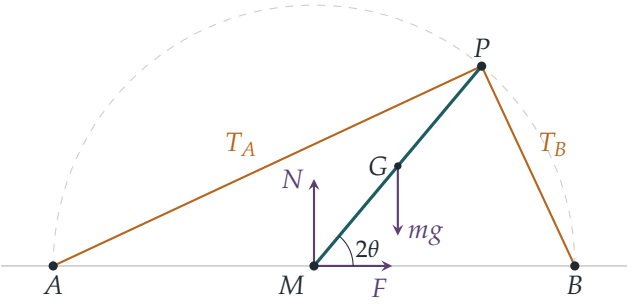
關鍵思路

由於 $MA = MB = MP = a$，點 P 位於以 AB 為直徑的圓上，而整道題正是由這一個觀察推動的：它給出 P 處的直角、以 θ 表示的繩長，以及每條繩與桿所成的角。根據胡克定律（Hooke's law），張力（tension）為 $\lambda(\text{長度} - \ell)/\ell$，它自然地分拆成「$\lambda \times$ 長度$/\ell$」部分和常數「$-\lambda$」部分；這個分拆正是第 (i) 部分所要求的分解。之後，只要對適當選取的點取力矩（moment），就能消去我們不需要的力。

解答

把桿模型化為均勻（uniform）剛性桿，其重量 mg 作用於中點 G；把繩模型化為遵從胡克定律的輕彈性繩（light elastic string）。把 M 置於原點，$B = (a, 0)$，$A = (-a, 0)$，於是

$$P = (a\cos 2\theta,\ a\sin 2\theta).$$



（圖中摩擦力 F 的方向會在第 (iii) 部分加以說明。）

第 (i) 部分

由於 $MA = MB = MP = a$，點 P 位於以 M 為圓心、AB 為直徑的圓上。根據半圓上的圓周角定理（angle in a semicircle），$\angle APB = 90°$。

繩長。三角形 MPA 是等腰三角形（isosceles），$MP = MA$，頂角 $\angle PMA = 180° - 2\theta$，因此兩個底角為 $\angle MPA = \angle MAP = \theta$。同理，三角形 MPB 的頂角為 2θ，所以 $\angle MPB = 90° - \theta$。在直角三角形 APB 中，斜邊(hypotenuse) $AB = 2a$，且 $\angle PAB = \theta$，故

$$PA = 2a\cos\theta, \qquad PB = 2a\sin\theta.$$

由於 $\theta < 45°$，有 $PB < PA$；兩條繩都處於張緊狀態，所以 $2a\sin\theta > \ell$。

分拆力。設 $\mathbf{u}_A$ 和 $\mathbf{u}_B$ 為由 P 分別指向 A 和 B 的單位向量（unit vector）。根據胡克定律，繩 PA 的張力為 $\lambda(PA - \ell)/\ell$，因此它在 P 點施於桿上的力為

$$\frac{\lambda(PA-\ell)}{\ell}\,\mathbf{u}_A = \frac{\lambda}{\ell}\,PA\,\mathbf{u}_A - \lambda\mathbf{u}_A = \frac{\lambda}{\ell}\,\overrightarrow{PA} - \lambda\mathbf{u}_A,$$

PB 的情況亦然。把兩者相加，

$$\text{繩的合力} = \frac{\lambda}{\ell}\left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}\right) - \lambda(\mathbf{u}_A + \mathbf{u}_B).$$

由於 M 是 AB 的中點，$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = 2\overrightarrow{PM}$，而 $|\overrightarrow{PM}| = a$。所以第一項是沿桿方向（指向 M）、大小為 $2a\lambda/\ell$ 的力。

至於第二項，$\mathbf{u}_A$ 和 $\mathbf{u}_B$ 是互相垂直的單位向量（P 處的角是直角），所以 $\mathbf{u}_A + \mathbf{u}_B$ 是單位正方形的對角線：其長度為 $\sqrt{2}$，方向沿 $\angle APB$ 的角平分線（bisector）。因此 $-\lambda(\mathbf{u}_A + \mathbf{u}_B)$ 是沿 $\angle APB$ 的角平分線（指離 AB）、大小為 $\sqrt{2}\,\lambda$ 的力。這就是所求的分解。

第 (ii) 部分

對 M 取力矩；該處的摩擦力（friction）和法向反作用力（normal reaction）沒有力矩。以逆時針方向為正（B 位於右方）。

> **想一想** M 與每條繩所在直線的距離是多少？

直線 PA 與 PM 所成的角為 $\angle MPA = \theta$，而 $PM = a$，所以 M 到直線 PA 的垂直距離為 $a\sin\theta$。同理，M 到直線 PB 的距離為 $a\sin(90° - \theta) = a\cos\theta$。重量作用於 M 右方水平距離 $\frac{1}{2}a\cos 2\theta$ 處。

繩 PA 把 P 拉向 A（繞 M 逆時針）；PB 和重量則使桿順時針轉動。以 T_A、T_B 表示兩條繩的張力，

$$T_A\,a\sin\theta \;=\; T_B\,a\cos\theta + mg\cdot\tfrac{1}{2}a\cos 2\theta.$$

代入 $T_A = \lambda(2a\cos\theta - \ell)/\ell$ 和 $T_B = \lambda(2a\sin\theta - \ell)/\ell$，

$$\begin{aligned} T_A\sin\theta - T_B\cos\theta &= \frac{\lambda}{\ell}\big(2a\cos\theta\sin\theta - \ell\sin\theta - 2a\sin\theta\cos\theta + \ell\cos\theta\big) \\ &= \lambda(\cos\theta - \sin\theta). \end{aligned}$$

（這其實就是那個大小為 $\sqrt{2}\lambda$、沿角平分線的力的力矩，因為沿桿方向的力對 M 沒有力矩。）於是力矩方程變為

$$\lambda(\cos\theta - \sin\theta) = \tfrac{1}{2}mg(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = \tfrac{1}{2}mg(\cos\theta - \sin\theta)(\cos\theta + \sin\theta).$$

由於 $0 < \theta < 45°$，有 $\cos\theta - \sin\theta > 0$，所以可以兩邊除以它：

$$\cos\theta + \sin\theta = \frac{2\lambda}{mg}.$$

λ 的範圍。寫成 $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\sin(\theta + 45°)$。桿與地面傾斜，所以 $0 < \theta < 45°$，即 $45° < \theta + 45° < 90°$，在此範圍內 sin 由 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 嚴格遞增至 1。因此

$$1 < \cos\theta + \sin\theta < \sqrt{2} \quad\Longrightarrow\quad \tfrac{1}{2}mg < \lambda < \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,mg,$$

這就是這種平衡（equilibrium）存在的必要條件（necessary condition）。

第 (iii) 部分

> ? **想一想** 對哪一點取力矩，能使兩條繩的力都從力矩方程中消失？

兩條繩都作用於 P，所以對 P 取力矩：這樣方程中只出現重量和 M 處的兩個地面作用力。相對於 P，點 M 位於水平距離 $a\cos 2\theta$（向左）及垂直距離 $a\sin 2\theta$（向下）處；G 的相應距離則為其一半。

假設摩擦力 F 指向 B（下文會加以證實）。對 P 取力矩：

- N（在 M 處向上，位於 P 左方）的順時針力矩為 $N\,a\cos 2\theta$；
- F（在 M 處指向 B，位於 P 下方）的逆時針力矩為 $F\,a\sin 2\theta$；
- mg（在 G 處向下，位於 P 左方）的逆時針力矩為 $mg\cdot\frac{1}{2}a\cos 2\theta$。

平衡時，

$$Na\cos 2\theta = Fa\sin 2\theta + \tfrac{1}{2}mg\,a\cos 2\theta.$$

由於 $2\theta < 90°$，有 $\cos 2\theta > 0$，兩邊除以 $a\cos 2\theta$ 得

$$N - F\tan 2\theta = \tfrac{1}{2}mg,$$

此即所求。

摩擦力的方向。沿水平方向分解，F 與繩力的水平分量平衡。由第 (i) 部分，$\mathbf{u}_A = (-\cos\theta, -\sin\theta)$，$\mathbf{u}_B = (\sin\theta, -\cos\theta)$，而 $\overrightarrow{PM} = (-a\cos 2\theta, -a\sin 2\theta)$，所以繩力的水平分量為 $-\frac{2a\lambda}{\ell}\cos 2\theta + \lambda(\cos\theta - \sin\theta)$。因此指向 B 的摩擦力為

$$F = \frac{2a\lambda}{\ell}\cos 2\theta - \lambda(\cos\theta - \sin\theta) = \lambda(\cos\theta - \sin\theta)\left(\frac{2a(\cos\theta + \sin\theta)}{\ell} - 1\right),$$

由於 $2a\sin\theta > \ell$（兩條繩都張緊），它是正數。所以摩擦力確實指向 B，而 F 就是其大小。

驗算

- 第 (ii) 部分的極限情況合理：當 $\theta \to 0$，桿幾乎平躺，$\lambda \to \frac{1}{2}mg$；當 $\theta \to 45°$，桿變為鉛直，$\lambda \to mg/\sqrt{2}$。
- 數值驗算：取 $a = 1$、$mg = 10$、$\theta = 20°$、$\ell = 0.5$，則 $\lambda = 5(\cos 20° + \sin 20°) \approx 6.408$，張力為 $T_A \approx 17.68$ 及 $T_B \approx 2.36$，分解後得 $N \approx 18.26$、$F \approx 15.81$，所以 $N - F\tan 40° \approx 5.00 = \frac{1}{2}mg$。對 M 的力矩亦平衡。以電腦對數千個隨機構形進行驗算，所有結果在捨入誤差範圍內均成立。

常見錯誤

- 把張力寫成 $\lambda \times$ 伸長量，而不是 $\lambda \times$ 伸長量$/\ell$。
- 除以 $\cos\theta - \sin\theta$ 或 $\cos 2\theta$ 時，沒有指出 $\theta < 45°$ 使它們為正。
- 在第 (iii) 部分對 M 取力矩：這樣會消去 N 和 F，而它們恰恰是我們想求的力。對 P 取力矩則會消去繩的力。

STEP 之外

第 (i) 部分的分拆是一個一般事實的巧妙例子：作用於剛體（rigid body）上的一組力，等價於單一個力加上一個力偶（couple），而你可以隨意把各力分組，使力矩的計算最為簡便。這裏「每條繩 $-\lambda$」的部分，表現得就像一對張力恆定的繩，其合力完全由幾何決定。剛體靜力學（statics）、虛功（virtual work）及平衡的穩定性，在 Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）中有深入的討論。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。