詳細解答

STEP II 2025，第 1 題

純數學 • 分段函數

STEP II 2025，第 1 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2025 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

關鍵思路

由 Min 構成的函數，其實只是一個在不同區間上由不同公式給出的普通函數。因此每次的第一步，都是找出兩個自變量在哪裏相交，把函數寫成分段函數（piecewise function），然後逐個區間處理，只保留落在其所屬區間內的答案。在接駁處，函數保持連續（continuous），但通常會出現一個角點（corner）；正是這個角點，令 (iv) 中的那一點成為極大點，而導數（derivative）卻不等於零。

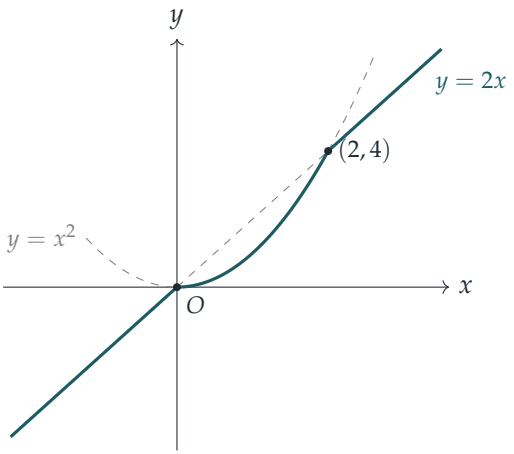
解答

第 (i) 部分

我們有 $x^2 \le 2x \iff x(x-2) \le 0 \iff 0 \le x \le 2$。因此

$$\operatorname{Min}(x^2, 2x) = \begin{cases} x^2 & 0 \le x \le 2, \\ 2x & x < 0 \text{ 或 } x > 2. \end{cases}$$

圖像沿直線 $y = 2x$ 走，只是在 $x = 0$ 與 $x = 2$ 之間會下沉到拋物線（parabola）上，因為拋物線在該處位於其弦（chord）之下。兩段直線部分都在同一條直線上。圖像在 $(0,0)$ 有一個角點，那裏拋物線的斜率（gradient）為 0，而直線的斜率為 2；在 $(2,4)$ 亦有一個角點，那裏兩者的斜率分別為 4 和 2。



第 (ii) 部分

利用 (i) 中的兩段。

- 當 $0 \le x \le 2$：$2x^2 = 5x - 3 \iff 2x^2 - 5x + 3 = 0 \iff (2x-3)(x-1) = 0$，所以 $x = 1$ 或 $x = \frac{3}{2}$。兩者都在 $[0,2]$ 內，所以兩個都成立。
- 當 $x < 0$ 或 $x > 2$：$4x = 5x - 3 \iff x = 3$，它滿足 $x > 2$，所以成立。

解為 $x = 1$、$x = \frac{3}{2}$ 和 $x = 3$。

第 (iii) 部分

我們還需要第二個函數：$x^3 \le 4x \iff x(x-2)(x+2) \le 0 \iff x \le -2$ 或 $0 \le x \le 2$。把兩者合起來，

$$\mathrm{Min}(x^2, 2x) + \mathrm{Min}(x^3, 4x) = \begin{cases} x^3 + 2x & x \le -2, \\ 6x & -2 < x < 0, \\ x^3 + x^2 & 0 \le x \le 2, \\ 6x & x > 2. \end{cases}$$

$m = 2$。

- $x \le -2$：$x^3 + 2x = 2x$ 給出 $x = 0$，不在該區間內。
- $-2 < x < 0$ 及 $x > 2$：$6x = 2x$ 給出 $x = 0$，兩個區間都不包含它。
- $0 \le x \le 2$：$x^3 + x^2 - 2x = x(x+2)(x-1) = 0$ 給出 $x = 0$ 或 $x = 1$（捨去 $x = -2$）。

所以當 $m = 2$ 時，解為 $x = 0$ 和 $x = 1$。

? 想一想 方程 $6x = 6x$ 會怎樣？

它對每一個 x 都成立，所以當 $m = 6$ 時，整個區間都是解，而不只是孤立的點。

$m = 6$。

- $x \le -2$：$x^3 + 2x = 6x \iff x(x-2)(x+2) = 0$，只有 $x = -2$ 在該區間內。
- $-2 < x < 0$ 及 $x > 2$：$6x = 6x$ 恆成立，所以這些區間內的每一個 x 都是解。
- $0 \le x \le 2$：$x^3 + x^2 - 6x = x(x+3)(x-2) = 0$ 給出 $x = 0$ 或 $x = 2$（捨去 $x = -3$）。

綜合起來，當 $m = 6$ 時，解集為

$$-2 \le x \le 0 \quad \text{或} \quad x \ge 2.$$

第 (iv) 部分

這裏 $x^3 \le x^2 \iff x^2(x-1) \le 0 \iff x \le 1$（因子 x^2 永不為負，而 $x = 0$ 時取等號）。因此

$$y = \begin{cases} 2x^3 - 5x & x \le 1, \\ 2x^2 - 5x & x > 1. \end{cases}$$

兩條公式在 $x = 1$ 時都給出 $y = -3$，所以曲線在該處連續，並通過 $(1, -3)$。

點 $(1, -3)$。 它不是駐點（stationary point）：在 $x = 1$ 處，左方的斜率是 $6x^2 - 5 = 1$，右方的斜率是 $4x - 5 = -1$。更準確地說，

- 當 $\sqrt{5/6} < x < 1$ 時，$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 6x^2 - 5 > 0$，所以 y 遞增至 -3；
- 當 $1 < x < \frac{5}{4}$ 時，$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 4x - 5 < 0$，所以 y 由 -3 遞減。

所以在 $x = 1$ 兩側附近的所有點都有 $y < -3$，故 $(1, -3)$ 是局部極大點（local maximum），也是曲線的一個角點。

其他轉向點。 在 $x < 1$ 上，$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 6x^2 - 5 = 0$ 給出 $x = \pm\sqrt{5/6} = \pm\frac{\sqrt{30}}{6}$，兩者都小於 1。利用 $2x^2 = \frac{5}{3}$，

$$y = x(2x^2 - 5) = -\tfrac{10}{3}x = \mp\tfrac{10}{3} \cdot \tfrac{\sqrt{30}}{6} = \mp\tfrac{5\sqrt{30}}{9}.$$

由於 $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2 = 12x$，$x < 0$ 的那一點是極大點，$x > 0$ 的那一點是極小點。在 $x > 1$ 上，$4x - 5 = 0$ 給出 $x = \frac{5}{4}$，此時 $y = \frac{25}{8} - \frac{25}{4} = -\frac{25}{8}$；由於拋物線開口向上，這是極小

點。所以其餘三個轉向點（turning point）為

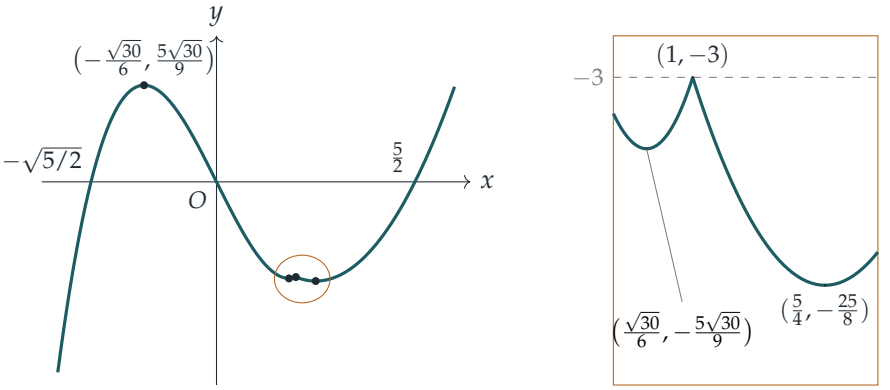
$$\text{極大點}\left(-\tfrac{\sqrt{30}}{6},\ \tfrac{5\sqrt{30}}{9}\right),\qquad \text{極小點}\left(\tfrac{\sqrt{30}}{6},\ -\tfrac{5\sqrt{30}}{9}\right)\text{ 和 }\left(\tfrac{5}{4},\ -\tfrac{25}{8}\right).$$

草圖。 三次函數 $2x^3-5x$ 是奇函數（odd function），所以曲線在 $-1\le x\le 1$ 的部分關於原點旋轉對稱。曲線與坐標軸相交於：$x(2x^2-5)=0$ 且 $x\le 1$ 之處，即 $x=0$ 和 $x=-\sqrt{5/2}\approx -1.58$；以及 $x(2x-5)=0$ 且 $x>1$ 之處，即 $x=\frac{5}{2}$。當 $x\to-\infty$ 時，$y\to-\infty$；當 $x\to\infty$ 時，$y\to\infty$。

$x=1$ 附近的三個點非常接近，所以值得確定它們的上下次序。把正數 $\frac{5\sqrt{30}}{9}$ 和 $\frac{25}{8}$ 平方，得 $\frac{750}{81}\approx 9.26$ 和 $\frac{625}{64}\approx 9.77$，所以

$$-\tfrac{25}{8}<-\tfrac{5\sqrt{30}}{9}<-3:$$

$x=\frac{5}{4}$ 處的極小點較低，而兩個極小點都在角點之下。在合理的比例下，這個細節是看不見的，所以插圖把它放大了。



驗算

- (ii)：在 $x=\frac{3}{2}$，$\text{Min}(\frac{9}{4},3)=\frac{9}{4}$，而 $2\cdot\frac{9}{4}=\frac{9}{2}=5\cdot\frac{3}{2}-3$；在 $x=3$，$\text{Min}(9,6)=6$，而 $12=15-3$。
- (iii)，$m=6$：試 $x=-1$，此時 $\text{Min}(1,-2)+\text{Min}(-1,-4)=-2-4=-6=6x$；而不在解集內的 $x=1$ 給出 $1+1=2\neq 6$。
- (iv)：用電腦在 $[-3,3]$ 上以 10^{-5} 的步長掃描 y，恰好找到四個轉向點，分別在 $x\approx -0.9129$（$y\approx 3.0429$）、0.9129（-3.0429）、1（-3）和 1.25（-3.125），與上面的數值吻合。

常見錯誤

- 保留了落在其公式適用區間以外的根，例如 (iii) 中 $m = 2$ 時的 $x = -2$。
- 把 $6x = 6x$ 當作只會給出單一數值來解，而沒有意識到它在整個區間上都成立。
- 在 (iv) 中把曲線在 $(1, -3)$ 處畫得圓滑：曲線在該處確實有一個角點，左方斜率為 1，右方斜率為 -1。

STEP 之外

像 $\text{Min}(f, g) = \frac{1}{2}\big(f + g - |f - g|\big)$ 這樣的函數，只要 f 和 g 連續，它就必定連續，但不一定可微（differentiable）；而 (iv) 說明局部極大點不一定是駐點。在數學分析（analysis）課程中，這引出了一個需要小心陳述的結果：可微函數的極值出現在導數為零之處；同時也引出了單側導數（one-sided derivatives）的概念。這類分段定義的函數在最優化（optimisation）中亦十分重要：若干個線性函數的最小值會產生角點，而這些角點正是線性規劃（linear programming）所研究的對象。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）在講解連續性和可微性時，正是以這類例子為出發點。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。