詳細解答

STEP III 2024，第 9 題

力學 • 斜碰撞

STEP III 2024，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2024 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

關鍵思路

一切都在桌面這個平面上發生，所以不妨從上方俯視：每個球都變成一個以其最低點為圓心、半徑為 r 的圓。對於光滑（smooth）球體，衝量（impulse）沿連心線（line of centres）作用，因此我們把速度分解為沿這條線的分量（動量守恆和恢復係數在此適用）和垂直於這條線的分量（保持不變）。此後 B 沿直線運動，而它會否撞到 C，就變成一個關於點到直線距離的問題。

解答

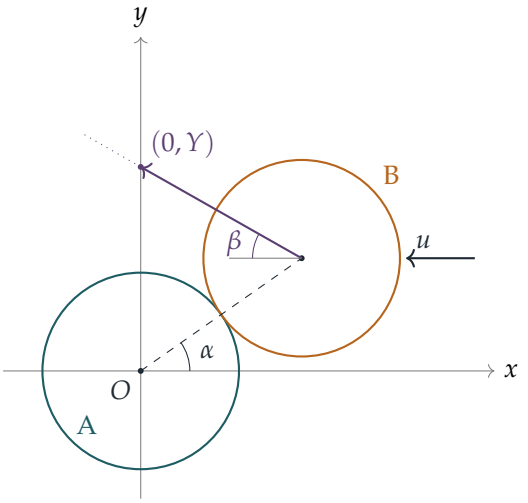
我們把球體視為光滑且質量相等，放在光滑桌面上，因此任何地方都沒有摩擦，而除了碰撞的瞬間外，每個球都以恆定速率沿直線運動。我們以最低點來處理，因為最低點在水平方向的運動與球心完全相同；兩個半徑為 r 的球，當它們的最低點相距 $2r$ 時便互相接觸。

第 (i) 部分

B 的最低點沿直線 $y = 2r\sin\alpha$ 移動。當它與 O 的距離為 $2r$ 時便接觸 A，即在點 $(2r\cos\alpha,\, 2r\sin\alpha)$（取正的 x 坐標，因為 B 從 x 值很大的正方向駛來）。因此碰撞時，從 A 指向 B 的連心線的單位向量（unit vector）為

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}, \qquad \text{而} \qquad \mathbf{t} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$$

與之垂直。



碰撞前 B 的速度為 $\begin{pmatrix} -u \\ 0 \end{pmatrix}$，沿 **n** 的分量為 $-u\cos\alpha$，沿 **t** 的分量為 $u\sin\alpha$。A 處於靜止。

由於球體光滑，兩者之間的衝量沿 **n** 方向。因此 B 的 **t** 分量保持為 $u\sin\alpha$（而 A 不會獲得任何 **t** 分量）。設碰撞後沿 **n** 的分量分別為 v_A 和 v_B。沿 **n** 方向的動量守恆（momentum conservation）（質量相等）及牛頓（Newton）恢復定律（law of restitution）給出

$$\begin{aligned} v_A + v_B &= -u\cos\alpha, \\ v_B - v_A &= \tfrac{1}{3}(0 - (-u\cos\alpha)) = \tfrac{1}{3}u\cos\alpha. \end{aligned}$$

（沿 **n** 的接近速率為 $u\cos\alpha$，而位於 **n** 正方向一側的 B 與 A 分離。）兩式相加，得 $v_B = -\frac{1}{3}u\cos\alpha$，以及 $v_A = -\frac{2}{3}u\cos\alpha$。

所以碰撞後 B 的速度為

$$\begin{aligned} -\tfrac{1}{3}u\cos\alpha \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} + u\sin\alpha \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}u(\cos^2\alpha + 3\sin^2\alpha) \\ \frac{2}{3}u\sin\alpha\cos\alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}u(1 + 2\sin^2\alpha) \\ \frac{2}{3}u\sin\alpha\cos\alpha \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

這裡用了 $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$。這就是所求的結果。

第 (ii) 部分

兩個分量都不為零，其中 x 分量為負，y 分量為正（因為 α 是銳角）。所以 B 此時向左上方運動，其路徑斜率的大小為

$$\frac{\frac{2}{3}u\sin\alpha\cos\alpha}{\frac{1}{3}u(1 + 2\sin^2\alpha)} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{1 + 2\sin^2\alpha} = \tan\beta,$$

其中 β 是路徑與 x 負方向所成的銳角。B 的最低點從 $(2r\cos\alpha, 2r\sin\alpha)$ 出發。要到達 y 軸，x 須減少 $2r\cos\alpha$，同時 y 增加 $2r\cos\alpha\tan\beta$。所以它在 $(0, Y)$ 穿過 y 軸，其中

$$Y = 2r\sin\alpha + 2r\cos\alpha\tan\beta = 2r(\cos\alpha\tan\beta + \sin\alpha),$$

正如所求。

第 (iii) 部分

碰撞後 B 以恆定速率沿直線運動，沿着經過 $(0, Y)$、單位方向向量為 $\mathbf{d} = (-\cos\beta, \sin\beta)$ 的直線 ℓ。C 一直靜止於 $(0, h)$，直至被撞到為止。B 撞到 C 當且僅當 $(0, h)$ 到 B 的路徑的距離跌到 $2r$ 以下。

$(0, h)$ 到 ℓ 的垂直距離（perpendicular distance），就是 $(0, h) - (0, Y) = (0, h - Y)$ 垂直於 $\mathbf{d}$ 的分量的大小。ℓ 的一個單位法向量為 $(\sin\beta, \cos\beta)$，所以這個距離是

$$|(0,\, h - Y)\cdot(\sin\beta, \cos\beta)| = |h - Y|\cos\beta,$$

因為 β 是銳角，所以 $\cos\beta > 0$。若 $h > Y + 2r\sec\beta$，則 $h - Y > 2r\sec\beta > 0$，而距離為 $(h - Y)\cos\beta > 2r$。B 的路徑上每一點（不只是整條直線上最近的那一點）與 C 的最低點的距離都至少有這麼遠。所以 B 永遠不會進入 C 的 $2r$ 範圍內，也就不會撞到它。

（也沒有其他東西阻礙：A 以速度 $-\frac{2}{3}u\cos\alpha\,\mathbf{n}$ 離開，進入 $y < 0$ 的區域，遠離 B 和 C。）

> **想一想** 第 (iv) 部分要求我們證明 $Y < 2r\sec\beta$。能否把它化為單一個三角恆等事實？

可以：兩邊乘以 $\cos\beta > 0$，左邊就變成一條複角公式（compound-angle formula）。

第 (iv) 部分

除以 $2r$ 並乘以 $\cos\beta > 0$，不等式 $Y < 2r\sec\beta$ 等價於

$$\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta < 1, \qquad \text{即} \qquad \sin(\alpha + \beta) < 1.$$

顯然 $\sin(\alpha + \beta) \le 1$，且等號只在 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ 時成立（因為 $0 < \alpha + \beta < \pi$）。這意味着 $\tan\beta = \cot\alpha$，即

$$\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{1 + 2\sin^2\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \iff 2\sin^2\alpha = 1 + 2\sin^2\alpha$$

（除以 $\cos\alpha \neq 0$），這是不可能的。因此 $\sin(\alpha + \beta) < 1$，從而 $Y < 2r\sec\beta$。

由此。現在

$$Y + 2r\sec\beta < 4r\sec\beta,$$

所以我們需要 $\sec\beta$ 在所有銳角 α 下的上界，即 $\tan\beta$ 的上界。分子分母同除以 $\cos^2\alpha$，並記 $t=\tan\alpha>0$，

$$\tan\beta=\frac{2\tan\alpha}{\sec^2\alpha+2\tan^2\alpha}=\frac{2t}{1+3t^2}\le\frac{2t}{2\sqrt{3}\,t}=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

這裡用了算術－幾何平均不等式（AM–GM inequality）$1+3t^2\ge 2\sqrt{3}\,t$（等號在 $t=1/\sqrt{3}$ 即 $\alpha=\frac{\pi}{6}$ 時成立）。所以 $0<\beta\le\frac{\pi}{6}$，從而 $\sec\beta\le\sec\frac{\pi}{6}=\frac{2}{\sqrt{3}}$。因此對每個銳角 α，

$$Y+2r\sec\beta<4r\sec\beta\le\frac{8r}{\sqrt{3}}.$$

若 $h>\dfrac{8r}{\sqrt{3}}$，則 $h>Y+2r\sec\beta$，由第 (iii) 部分可知，無論 α 取何值，B 都不會撞到 C。

驗算

- 動量：A 的速度 $-\frac{2}{3}u\cos\alpha\,(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 加上第 (i) 部分中 B 的速度，總和為 $(-u,0)$，符合質量相等時應有的結果。
- 當 $\alpha=0$（正面碰撞）時，公式給出 B 的速度為 $(-\frac{1}{3}u,0)$，而 A 得到 $(-\frac{2}{3}u,0)$：正是質量相等、$e=\frac{1}{3}$ 時常見的一維答案。
- 取 $\alpha=\frac{\pi}{6}$，得 $\tan\beta=1/\sqrt{3}$，所以 $\beta=\frac{\pi}{6}$，$\alpha+\beta=\frac{\pi}{3}$，而 $Y=2r(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2})=2r$，明顯小於 $2r\sec\beta=4r/\sqrt{3}\approx 2.31r$。於是 $Y+2r\sec\beta\approx 4.31r$，低於 $8r/\sqrt{3}\approx 4.62r$。
- 我們用電腦對 20,000 個隨機的 α 值作了驗證：逐步推進 B 的直線路徑，得到的穿越點正是上面的 Y；在略高於 $h=Y+2r\sec\beta$ 時 B 避過 C，略低於此值時則撞到 C；而 $\sec\beta$ 的最大值為 $1.1547\ldots=2/\sqrt{3}$。

常見錯誤

- 把恢復係數應用於 x 分量，而不是沿連心線的分量。光滑球體之間的衝量沿連心線作用，而這裡連心線與 x 軸成角 α。
- 以為碰撞時連心線沿 x 軸或 y 軸。接觸點是由兩球相距 $2r$ 這一條件決定的。
- 在第 (iii) 部分中，只檢驗 C 的最低點是否在單一點 $(0,Y)$ 的 $2r$ 範圍內，而不是整條路徑的 $2r$ 範圍內。

STEP 之外

把速度分解為沿某個選定單位向量及垂直於它的分量，就是投影到一組標準正交基（orthonormal basis）上，這個概念貫穿大學一年級的線性代數和力學。光滑球體的斜碰（oblique collision）是散射（scattering）的入門模型，物理學家用它來研究氣體和粒子碰撞。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）就以這種向量方法處理二維碰撞。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。