詳細解答

STEP III 2024，第 8 題

純數學 • 相交圓錐曲線

STEP III 2024，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2024 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

關鍵思路

形如 $y^2 - x^2 + \ldots$ 的二次式（quadratic expression），當且僅當配方（completing the square）後不留下常數項時，才會分解為兩條斜率（gradient）為 ± 1 的直線。題目其餘部分的竅門在於：把一條曲線方程的某個倍數加到另一條曲線的方程上，不會失去任何公共點；而選取恰當的倍數，便能把棘手的四次（quartic）問題化為「哪些直線與拋物線（parabola）相交」，而這只不過是兩個二次方程。

解答

第 (i) 部分

乘積為零當且僅當其中一個因子為零，因此滿足 $(y - x + 3)(y + x - 5) = 0$ 的點，就是 $y = x - 3$（斜率為 1）上的點，連同 $y = -x + 5$（斜率為 -1）上的點。

對於一般方程，就兩個變量分別配方：

$$y^2 - x^2 + py + qx + r = (y + \tfrac{1}{2}p)^2 - (x - \tfrac{1}{2}q)^2 - K, \qquad \text{其中} K = \tfrac{1}{4}(p^2 - q^2) - r.$$

設 $Y = y + \frac{1}{2}p$ 及 $X = x - \frac{1}{2}q$，這是一個平移（translation），不會改變斜率。方程變為 $(Y - X)(Y + X) = K$。

若 $p^2 - q^2 = 4r$，則 $K = 0$，方程為 $(Y - X)(Y + X) = 0$；由第一段可知，這是直線 $Y = X$ 與 $Y = -X$ 組成的一對直線，斜率分別為 1 和 -1。在原坐標下，它們是

$$y - x + \tfrac{1}{2}(p + q) = 0 \quad \text{及} \quad y + x + \tfrac{1}{2}(p - q) = 0.$$

反過來，假設該方程表示一對斜率為 ± 1 的直線；我們證明 $K = 0$。其中一條直線的斜

率為 1，故具有 $Y = X + c$ 的形式，而且直線上每一點都滿足該方程。在這條直線上，$(Y - X)(Y + X) = c(2X + c)$，所以對每一個實數 X 都有 $2cX + c^2 = K$。X 的線性函數只有在其係數為零時才是常數，所以 $c = 0$，於是 $K = c^2 = 0$。因此 $p^2 - q^2 = 4r$，「當且僅當」（if and only if）得證。

第 (ii) 部分

若某點位於 C_1 上，則該處有 $y^2 + 2sy + s(s+1) - x = 0$；若它位於 C_2 上，則該處有 $y - x^2 = 0$。所以在公共點處，表達式

$$y^2 + 2sy + s(s+1) - x + k(y - x^2)$$

的值為 $0 + k \cdot 0 = 0$，不論 k 取何值。

取 $k = 1$，方程為

$$y^2 - x^2 + (2s+1)y - x + s(s+1) = 0,$$

它具有第 (i) 部分的形式，其中 $p = 2s + 1$、$q = -1$、$r = s(s+1)$。於是

$$p^2 - q^2 = 4s^2 + 4s + 1 - 1 = 4s(s+1) = 4r,$$

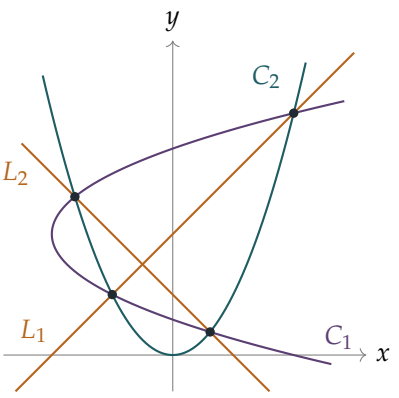
所以由第 (i) 部分，這是一對斜率為 1 和 -1 的直線。利用第 (i) 部分的因式分解（factorisation），並注意 $\frac{1}{2}(p+q) = s$ 及 $\frac{1}{2}(p-q) = s+1$，方程為

$$(y - x + s)(y + x + s + 1) = 0,$$

所以這兩條直線是

$$L_1 : \ y = x - s \qquad \text{及} \qquad L_2 : \ y = -x - s - 1.$$

由第一段，$C_1 \cap C_2$ 的每一點都滿足這個方程，所以全部四個交點都位於 $L_1 \cup L_2$ 上。（這對每個 s 都成立；我們從來不需要這四個點存在。）



圖中所示為 $s = -2$ 的情況：C_1 為 $x = (y-2)^2 - 2$，而 C_1 與 C_2 的四個公共點分別有兩個位於直線 $y = x + 2$ 上、兩個位於直線 $y = 1 - x$ 上。

第 (iii) 部分

C_1 與 C_2 的每個公共點都位於 C_2 上，並位於 L_1 或 L_2 上。代入 $y = x^2$：

$$\begin{aligned} \text{對於} L_1: \quad & x^2 - x + s = 0, \\ \text{對於} L_2: \quad & x^2 + x + s + 1 = 0. \end{aligned}$$

C_2 上的點由其 x 坐標唯一確定，所以每條直線與 C_2 至多相交於兩點。因此，要有四個不同的公共點，每個二次方程都必須有兩個不同的實根，所以兩個判別式(discriminant)都為正：

$$1 - 4s > 0 \quad \text{及} \quad 1 - 4(s+1) > 0.$$

第二個不等式給出 $s < -\frac{3}{4}$，即所求。(第一個不等式 $s < \frac{1}{4}$ 隨之自動成立。)

> **想一想** 在第 (iv) 部分，為甚麼只找出四個同時位於 C_2 和 $L_1 \cup L_2$ 上的點並不足夠？

第 (ii) 部分只證明了 C_1 與 C_2 的公共點位於這兩條直線上；我們還需要反方向的結論，而且必須確保這四個點不會重合。

第 (iv) 部分

設 $s < -\frac{3}{4}$。那麼上述兩個判別式都為正（$-3 - 4s > 0$，以及 $1 - 4s > 4 > 0$），所以 L_1 與 C_2 相交於兩個不同的點，L_2 亦然。

這四個點互不相同。若某點被重複計算，它便同時位於 L_1 和 L_2 上。兩直線相交於 $x - s = -x - s - 1$ 之處，即點 $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} - s)$。此點只在 $-\frac{1}{2} - s = \frac{1}{4}$，即 $s = -\frac{3}{4}$ 時才位於 C_2 上，而這已被排除。所以我們得到四個不同的點。

它們每一個都位於 C_1 上。在每一點處都有 $y - x^2 = 0$（因為它在 C_2 上），而第 (ii) 部分 $k = 1$ 的方程亦成立（因為它在 L_1 或 L_2 上）。兩式相減，得

$$y^2 + 2sy + s(s+1) - x = 0,$$

這正是 C_1 的方程。

所以 C_1 與 C_2 至少有四個不同的公共點；由第 (iii) 部分的論證，它們不可能多於四個。因此兩者恰好相交於四個不同的點。

驗算

- 把 $y = x^2$ 代入 C_1，得四次方程 $x^4 + 2sx^2 - x + s^2 + s = 0$。展開 $(x^2 - x + s)(x^2 + x + s + 1)$ 正好得到此式，印證了這對直線。

- 當 $s = -2$ 時，四個點為 $(2,4)$、$(-1,1)$ 及 $\left(\frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5}), \frac{1}{2}(3 \mp \sqrt{5})\right)$；每一點都滿足 $x = (y-2)^2 - 2$，例如 $(2,4)$：$(4-2)^2 - 2 = 2$。
- 在邊界 $s = -\frac{3}{4}$ 時，兩個二次方程為 $x^2 - x - \frac{3}{4} = 0$（根為 $\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}$）及 $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 0$，所以只有兩個不同的公共點，其中 $x = -\frac{1}{2}$ 為兩條直線所共有。用電腦計算該四次方程的實根數目，在 $s = -0.76, -1, -2$ 時得 4 個，在 $s = -0.74, -0.5$ 時得 2 個。

常見錯誤

- 在第 (i) 部分只證明「若」的方向：一對直線必然給出 $p^2 - q^2 = 4r$，這一點需要論證（例如上文的論證）。
- 在第 (iv) 部分，忘記檢查兩條直線沒有共用 C_2 上的點，或忘記證明所找到的點確實位於 C_1 上。

STEP 之外

方程族 $F + kG = 0$ 稱為**二次曲線束**（pencil of conics）：族中每一條曲線都經過 $F = 0$ 與 $G = 0$ 的公共點。選取 k 使該曲線退化（degenerate）為一對直線，是求兩條二次曲線（conics）交點的經典方法。在射影幾何（projective geometry）中，做法是令一個 3×3 行列式（determinant）為零，從而得到一個關於 k 的三次方程。在本題中，不論 s 為何值，曲線束在 $k = 1$ 時恰好都是退化的。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）講解了二次曲線背後的對稱矩陣（symmetric matrices）。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等數學難題》）收錄了更多同類型的題目。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。