詳細解答

STEP III 2024，第 7 題

純數學 • e^2 的無理性

STEP III 2024，第 7 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2024 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

本題在 *Beyond STEP* 第 1.4 節*e 是無理數，e^2 也是*中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch01/e-irrational.html

關鍵思路

兩個級數都是指數級數（exponential series）乘以一個階乘（factorial）之後的尾項（tail）。把 $\mathrm{e} = \sum 1/r!$ 乘以 $(2n)!$，則直至 $r = 2n$ 的每一項都變成整數，而其後的部分恰好就是 $\mathrm{f}(2n)$；$1/\mathrm{e}$ 與 $\mathrm{g}(2n)$ 亦有同樣情況。假如 e^2 是有理數（rational），這些細小尾項的某個組合便必須是整數，但它卻被嚴格夾在 0 與 1 之間。

解答

記

$$a_k = \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}, \qquad k \geq 1,$$

於是 $\mathrm{f}(n) = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$，而 $\mathrm{g}(n) = a_1 - a_2 + a_3 - \cdots$。注意 $a_{k+1} = a_k/(n+k+1)$。

第 (i) 部分

每個 a_k 都是正數，所以 $\mathrm{f}(n) > 0$。a_k 分母中的每個因子都至少是 $n+1$，所以 $a_k \leq 1/(n+1)^k$，而當 $k \geq 2$ 時不等式是嚴格的（因為出現了因子 $n+2$）。與公比為 $\frac{1}{n+1} < 1$

的幾何級數（geometric series）比較，

$$\mathrm{f}(n) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^k} = \frac{\frac{1}{n+1}}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n}.$$

因此 $0 < \mathrm{f}(n) < \frac{1}{n}$。

第 (ii) 部分

相鄰各項嚴格遞減：由於 $n+k+1 > 1$，$a_{k+1} = a_k/(n+k+1) < a_k$。從頭開始兩兩分組，

$$\mathrm{g}(n) = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots > 0,$$

因為每個括號都是正數。改為從第一項之後開始分組，

$$\mathrm{g}(n) = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots < a_1 = \frac{1}{n+1},$$

因為每個括號同樣是正數。所以 $0 < \mathrm{g}(n) < \frac{1}{n+1}$。

第 (iii) 部分

設 $m = 2n$。利用 $\mathrm{e} = \sum_{r\ge 0} 1/r!$，

$$m!\,\mathrm{e} = \sum_{r=0}^{m} \frac{m!}{r!} + \sum_{r=m+1}^{\infty} \frac{m!}{r!}.$$

當 $r \le m$ 時，$m!/r! = (r+1)(r+2)\cdots m$ 是整數，所以第一個和是整數，記之為 A。在第二個和中，$m!/(m+k)! = 1/\big((m+1)\cdots(m+k)\big)$，這正是 $\mathrm{f}(m)$ 的第 k 項。所以 $m!\,\mathrm{e} = A + \mathrm{f}(m)$，而 $(2n)!\,\mathrm{e} - \mathrm{f}(2n) = A$ 是整數。

同理，由 $1/\mathrm{e} = \sum_{r\ge 0}(-1)^r/r!$ 得

$$\frac{m!}{\mathrm{e}} = \underbrace{\sum_{r=0}^{m} (-1)^r \frac{m!}{r!}}_{B\in\mathbb{Z}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+k}}{(m+1)(m+2)\cdots(m+k)}.$$

想一想 為甚麼題目用 $2n$ 而不用 n？

由於 $m = 2n$ 是偶數，$(-1)^{m+k} = (-1)^k$，所以尾項是 $-a_1 + a_2 - a_3 + \cdots = -\mathrm{g}(m)$（此處 a_k 改由 m 構成）。因此 $m!/\mathrm{e} = B - \mathrm{g}(m)$，而 $\dfrac{(2n)!}{\mathrm{e}} + \mathrm{g}(2n) = B$ 是整數。（若 m 為奇數，尾項會是 $+\mathrm{g}(m)$，我們便需要改用減號。）

第 (iv) 部分

利用第 (iii) 部分中的整數 A 和 B，

$$\begin{aligned} q\,\mathrm{f}(2n) + p\,\mathrm{g}(2n) &= q\big((2n)!\,\mathrm{e} - A\big) + p\Big(B - \frac{(2n)!}{\mathrm{e}}\Big) \\ &= (2n)!\Big(q\mathrm{e} - \frac{p}{\mathrm{e}}\Big) - qA + pB \\ &= pB - qA, \end{aligned}$$

因為 $q\mathrm{e} = p/\mathrm{e}$。由於 p, q, A, B 都是整數，所以對每個正整數 n，$q\,\mathrm{f}(2n) + p\,\mathrm{g}(2n)$ 亦是整數。

第 (v) 部分

用反證法（proof by contradiction），假設 e^2 是有理數。由於 $\mathrm{e}^2 > 0$，我們可寫 $\mathrm{e}^2 = p/q$，其中 p, q 是正整數；兩邊除以 e 得 $q\mathrm{e} = p/\mathrm{e}$。由第 (iv) 部分，對每個 $n \geq 1$，$N_n = q\,\mathrm{f}(2n) + p\,\mathrm{g}(2n)$ 都是整數。

> **想一想** 怎樣才能令 N_n 不是整數？

把第 (i) 及 (ii) 部分應用於 $2n$，將它夾住。由於 $p, q > 0$，

$$0 < N_n < \frac{q}{2n} + \frac{p}{2n+1} < \frac{p+q}{2n}.$$

現在取足夠大的 n，使 $2n > p + q$。那麼 $0 < N_n < 1$，即 N_n 是嚴格介乎 0 與 1 之間的整數，這是不可能的。因此 e^2 是無理數（irrational）。

驗算

細小的情況可以準確求和。當 $n = 2$ 時，第 (iii) 部分指出 $24\mathrm{e} - \mathrm{f}(4)$ 是整數；事實上 $\sum_{r=0}^{4} 24/r! = 65$，而 $\mathrm{f}(4) = 24\mathrm{e} - 65 \approx 0.2388$，穩穩落在 $(0, \frac{1}{4})$ 之內。同樣地，$\mathrm{f}(2) = 2\mathrm{e} - 5 \approx 0.4366 < \frac{1}{2}$，而 $\mathrm{g}(2) = 1 - 2/\mathrm{e} \approx 0.2642 < \frac{1}{3}$。電腦驗算確認了：(i) 和 (ii) 的界限對 $n \leq 24$ 成立；(iii) 的整數性對 $2n \leq 22$ 成立；以及對隨機的 p, q，$0 < q\,\mathrm{f}(2n) + p\,\mathrm{g}(2n) < (p+q)/(2n)$ 成立。

常見錯誤

- 聲稱 $a_k < 1/(n+1)^k$ 對所有 k 成立：在 $k = 1$ 時等號成立，所以嚴格不等式來自 $k \geq 2$ 的各項。
- 忘記 $1/\mathrm{e}$ 展開式中尾項的符號：它之所以是 $-\mathrm{g}(2n)$，只因為 $2n$ 是偶數。

- 停在「N_n 很小」這一步：要得出矛盾，還需要 $N_n > 0$，這正是 (i) 和 (ii) 中下界重要的原因。

STEP 之外

這是傅立葉（Fourier）證明 e 為無理數的經典方法，並透過把 $e^2 = p/q$ 拆成 $qe = p/e$ 加以推廣，使兩個級數都快速收斂（converge）。同一思路經過更細緻的處理，可證明對每個非零有理數 r，e^r 都是無理數；劉維爾（Liouville）亦用它證明了 e 不是任何整係數二次方程（quadratic equation）的根。估計級數尾項的界是大學一年級分析（analysis）的核心技巧；可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。