詳細解答

STEP III 2024，第 6 題

純數學 • 線性微分方程

STEP III 2024，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2024 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

關鍵思路

控制量（control）u 以相同方式加到每一條方程上，所以座標的任何一個係數總和為零的組合，都完全不受 u 影響。只要選對這個組合，它的導數（derivative）就是它本身的倍數，因此無論 u 怎樣變化，它都會按指數（exponential）增長或衰減。指數函數除非一開始就是零，否則永遠不會等於零，由此便得到必要條件（necessary condition）。當這些條件成立時，運動就簡化為單一條一階（first-order）方程，而我們可以用常數 u 把它解出來。

解答

第 (i) 部分

(a) 把兩條方程相減，含 u 的項互相抵消：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = (-x + 3y + u) - (x + y + u) = -2(x - y).$$

因此 $w = x - y$ 滿足 $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = -2w$，於是對任何函數 u，都有

$$x - y = (x_0 - y_0)\,\mathrm{e}^{-2t}$$

若質點在某個 $t > 0$ 時位於原點，則該時刻 $x - y = 0$。由於 $\mathrm{e}^{-2t} \neq 0$，這迫使 $x_0 - y_0 = 0$，即 $x_0 = y_0$。

(b) 當 $x_0 = y_0$ 時，(a) 的公式給出對*所有* t 都有 $x - y = 0$，所以質點一直留在直線 $y = x$ 上。把 $y = x$ 代入第一條方程，得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2x + u.$$

當 u 為常數時，這是一條常係數線性方程。其特解（particular solution）為常數 $-\frac{1}{2}u$，所以

$$x = -\tfrac{1}{2}u + \left(x_0 + \tfrac{1}{2}u\right)\mathrm{e}^{2t}.$$

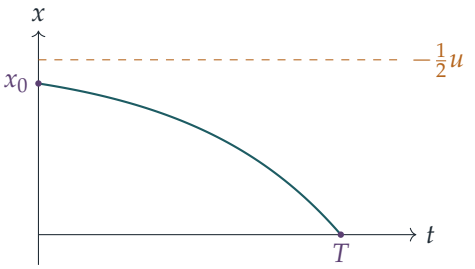
我們需要 $x(T) = 0$（這時 $y(T) = x(T) = 0$ 亦隨之成立）：

$$\left(x_0 + \tfrac{1}{2}u\right)\mathrm{e}^{2T} = \tfrac{1}{2}u \quad\Longrightarrow\quad x_0\,\mathrm{e}^{2T} = \tfrac{1}{2}u\left(1 - \mathrm{e}^{2T}\right).$$

由於 $T > 0$，$\mathrm{e}^{2T} \neq 1$，所以可以相除：

$$\boxed{u = -\frac{2x_0\,\mathrm{e}^{2T}}{\mathrm{e}^{2T} - 1}}$$

這個正負號是合理的。若不加控制，$\dot{x} = 2x$ 會把質點推離原點，所以 u 必須朝與 x_0 相反的方向推。（若 $x_0 = 0$，質點在 $u = 0$ 時已靜止於原點。）



圖中所示為 $x_0 = 1$、$T = 1$ 的情況。質點從不穩定平衡點（unstable equilibrium）$x = -\frac{1}{2}u$ 稍下方出發，被推離該點，並恰好在時間 T 到達原點。

第 (ii) 部分

(a) 仿照第 (i) 部分，我們尋找一個 $ax + by + cz$，其中 $a + b + c = 0$（使 u 抵消），而且它的導數是它本身的倍數。「x，然後 $-2y$，然後 z」這個規律提示我們取 $w = x - 2y + z$：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} &= (4y - 5z + u) - 2(x - 2z + u) + (x - 2y + u)\\ &= -x + 2y - z = -w.\end{aligned}$$

因此無論 u 是甚麼，都有 $x - 2y + z = (x_0 - 2y_0 + z_0)\,\mathrm{e}^{-t}$。在原點處 $w = 0$，而 $\mathrm{e}^{-t} \neq 0$，所以 $x_0 - 2y_0 + z_0 = 0$。也就是說，$y_0 = \frac{1}{2}(x_0 + z_0)$，即 x_0 與 z_0 的平均值。

> ? **想一想** 是否還有第二個同樣不受 u 影響的組合？

最後兩條方程都含有 $x + u$，所以把它們相減，可以同時消去 x 和 u。設 $v = y - z$，則

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = (x - 2z + u) - (x - 2y + u) = 2(y - z) = 2v,$$

所以 $y - z = (y_0 - z_0)\,\mathrm{e}^{2t}$。

(b) 若質點在某個 $t > 0$ 時位於原點，則該時刻 $v = 0$。由於 $\mathrm{e}^{2t} \neq 0$，得 $y_0 = z_0$。結合 (a)，有 $x_0 = 2y_0 - z_0 = y_0$，所以 $x_0 = y_0 = z_0$。

(c) 當 $x_0 = y_0 = z_0$ 時，w 和 v 的初始值都是 0，所以對所有 t 它們都保持為 0：$y = z$，從而 $x = 2y - z = y$。質點沿直線 $x = y = z$ 運動，而每條方程都變成

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 4x - 5x + u = -x + u$$

（第二和第三條方程給出 $x - 2x + u$，結果相同）。當 u 為常數時，

$$x = u + (x_0 - u)\,\mathrm{e}^{-t}.$$

令 $x(T) = 0$，得 $u\left(1 - \mathrm{e}^{-T}\right) = -x_0\,\mathrm{e}^{-T}$。由於 $T > 0$，可以相除；再把分子分母同乘 e^{T}，得

$$\boxed{u = -\frac{x_0}{\mathrm{e}^{T} - 1}}$$

這裏不受控制的運動 $\dot{x} = -x$ 本身已會衰減趨向原點，但只是在 $t \to \infty$ 時才到達。只需一個朝向原點的小推動（當 $T \to \infty$ 時趨於零），就能令質點在有限時間內到達原點。

驗算

- 極限：當 $T \to \infty$ 時，(ii)(c) 的答案趨於 0，與自然衰減相符；而 (i)(b) 的答案趨於 $-2x_0$，這使 $x_0 = -\frac{1}{2}u$ 成為平衡點。質點於是停留在那裏，永遠不會到達原點，這正是有限的 T 需要絕對值稍大的 u 的原因。當 $T \to 0^{+}$ 時，兩個答案都趨於無窮大，這是應有的結果。
- 數值驗算：取 $x_0 = 1$、$T = 1$，第 (i)(b) 部分給出 $u \approx -2.3130$，用數值方法逐步推進方程，在 $t = 1$ 時落在 $(0, 0)$，誤差在 10^{-8} 以內。(ii)(c) 取 $u = -1/(\mathrm{e} - 1) \approx -0.5820$ 時亦同樣成立。此外，亦驗證了當 u 是隨時間變化的非常數函數時，不變量（invariant）$x - y$、$x - 2y + z$ 和 $y - z$ 仍然按各自的指數函數變化。

常見錯誤

- 在 (i)(a) 或 (ii)(a)、(b) 中假設 u 為常數。這些部分針對的是任何 u，而 u 被抵消正是整個關鍵所在。
- 在 (i)(b) 和 (ii)(c) 中，忘記說明爲甚麼對所有時間都有 $y = x$（或 $x = y = z$）。這是由初始值為零的指數公式得出的。

STEP 之外

這是對控制理論（control theory）的初步體驗。把系統寫成 $\dot{\mathbf{r}} = A\mathbf{r} + \mathbf{b}u$，我們找到的組合就是 A 的左特徵向量（left eigenvector），而且與 $\mathbf{b}$ 正交（orthogonal），所以任何控制都無法影響它們。卡爾曼（Kalman）的秩條件（rank condition）決定是否每個狀態都能被引導到原點。這裏該條件不成立，這正是為甚麼只有特殊的起點才可行。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）涵蓋特徵向量方面的內容，而 Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）則涵蓋常微分方程的線性系統。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。