詳細解答

STEP III 2024，第 5 題

純數學 • 矩陣微分方程

STEP III 2024，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2024 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

本題在 *Beyond STEP* 第 7.7 節*永恆不變的量*中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch07/lax-pairs.html

關鍵思路

一切都取決於跡（trace）的兩個性質：它是線性（linear）的，而且 $\operatorname{tr}(\mathbf{XY}) = \operatorname{tr}(\mathbf{YX})$。第 (ii) 部分給出行列式（determinant）變化率的公式，即雅可比公式（Jacobi's formula）。它把「$\det \mathbf{M}$ 是否不變？」轉化為「某個跡是否為零？」。在 (iii) 中，交換子（commutator）$\mathbf{MN} - \mathbf{NM}$ 的跡必定為零，由此得到全部三個不變量（invariants）。在 (iv) 中，同一條公式表明 $\operatorname{tr} \mathbf{N}$ 量度的是 $\ln|\det \mathbf{M}|$ 的變化快慢，於是問題變成：一個矩陣能否跡不變而行列式改變？

解答

第 (i) 部分

設 $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 及 $\mathbf{N} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$。$\mathbf{MN}$ 的對角元素是 $ap + br$ 和 $cq + ds$，而 $\mathbf{NM}$ 的對角元素是 $pa + qc$ 和 $rb + sd$。所以

$$\operatorname{tr}(\mathbf{MN}) = ap + br + cq + ds = \operatorname{tr}(\mathbf{NM}).$$

此外，$\mathbf{M} + \mathbf{N}$ 的對角元素是 $a + p$ 和 $d + s$，所以

$$\operatorname{tr}(\mathbf{M} + \mathbf{N}) = \operatorname{tr}(\mathbf{M}) + \operatorname{tr}(\mathbf{N}).$$

同理，對純量 k 有 $\operatorname{tr}(k\mathbf{M}) = k\operatorname{tr}(\mathbf{M})$，而 $\mathrm{d}\mathbf{M}/\mathrm{d}t$ 的跡等於 $\operatorname{tr}\mathbf{M}$ 的導數。下文會隨意使用這些性質。

第 (ii) 部分

元素 a, b, c, d 均隨 t 而變（撇號表示 $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$），由乘積法則（product rule）得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\det\mathbf{M}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(ad - bc) = a'd + ad' - b'c - bc'.$$

由於 $\mathbf{M}$ 是非奇異（non-singular）矩陣，$\mathbf{M}^{-1} = \dfrac{1}{\det\mathbf{M}}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$，而

$$\mathbf{M}^{-1}\frac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\det\mathbf{M}}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \frac{1}{\det\mathbf{M}}\begin{pmatrix} da' - bc' & * \\ * & -cb' + ad' \end{pmatrix}.$$

它的跡是 $\dfrac{a'd + ad' - b'c - bc'}{\det\mathbf{M}}$，即 $\dfrac{1}{\det\mathbf{M}}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\det\mathbf{M})$，得證。

第 (iii) 部分

行列式。由 (ii) 及跡的線性，

$$\frac{1}{\det\mathbf{M}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\det\mathbf{M}) = \operatorname{tr}\big(\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{MN} - \mathbf{NM})\big) = \operatorname{tr}(\mathbf{N}) - \operatorname{tr}(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{NM}).$$

對兩個矩陣 $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}$ 和 $\mathbf{M}$ 應用 (i)，得 $\operatorname{tr}(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}\,\mathbf{M}) = \operatorname{tr}(\mathbf{M}\,\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}) = \operatorname{tr}(\mathbf{N})$。所以右方為零。由於 $\det\mathbf{M} \neq 0$，得 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\det\mathbf{M}) = 0$。

跡。由 (i)，$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{tr}(\mathbf{M}) = \operatorname{tr}\Big(\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}t}\Big) = \operatorname{tr}(\mathbf{MN}) - \operatorname{tr}(\mathbf{NM}) = 0$。

平方的跡。只要保持因子的次序，乘積法則對矩陣同樣成立：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{M}^2) &= \frac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}t}\mathbf{M} + \mathbf{M}\frac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}t} = (\mathbf{MN} - \mathbf{NM})\mathbf{M} + \mathbf{M}(\mathbf{MN} - \mathbf{NM}) \\ &= \mathbf{M}^2\mathbf{N} - \mathbf{NM}^2,\end{aligned}$$

因為兩個 $\mathbf{MNM}$ 項互相抵消。這同樣是交換子的形式，只是以 $\mathbf{M}^2$ 代替 $\mathbf{M}$，所以由 (i) 知其跡為零。因此 $\operatorname{tr}(\mathbf{M}^2)$ 亦是常數。三個量都與 t 無關。

> ? **想一想** 當 $\mathbf{N}$ 也隨 t 而變時，怎樣解 $\mathrm{d}\mathbf{M}/\mathrm{d}t = \mathbf{MN} - \mathbf{NM}$？

把 $\mathbf{N}$ 中與一切矩陣都可交換的部分分拆出來。寫 $\mathbf{N} = t\mathbf{I} + t\mathbf{J}$，其中 $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$。單位

矩陣與 $\mathbf{M}$ 可交換，所以 $\mathbf{MN}-\mathbf{NM}=t(\mathbf{MJ}-\mathbf{JM})$。設 $\mathbf{M}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$，則

$$\mathbf{MJ}-\mathbf{JM}=\begin{pmatrix}0 & a\\ 0 & c\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}c & d\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-c & a-d\\ 0 & c\end{pmatrix}.$$

比較元素，得四條純量方程：

$$a'=-tc,\qquad b'=t(a-d),\qquad c'=0,\qquad d'=tc.$$

以 $t=0$ 時的值 A,B,C,D 依次求解：

- $c'=0$，所以 $c=C$。
- 於是 $a'=-Ct$ 及 $d'=Ct$，所以 $a=A-\frac{1}{2}Ct^2$ 及 $d=D+\frac{1}{2}Ct^2$。
- 現在 $a-d=A-D-Ct^2$，所以 $b'=(A-D)t-Ct^3$，得 $b=B+\frac{1}{2}(A-D)t^2-\frac{1}{4}Ct^4$。

因此

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix}A-\frac{1}{2}Ct^2 & B+\frac{1}{2}(A-D)t^2-\frac{1}{4}Ct^4\\ C & D+\frac{1}{2}Ct^2\end{pmatrix}.$$

驗算一下：跡是 $A+D$，而展開 $ad-bc$ 可見 t 的各次冪全部抵消，剩下 $AD-BC$。這與本部分前半的結果一致。

第 (iv) 部分

現在 $\mathrm{d}\mathbf{M}/\mathrm{d}t=\mathbf{MN}$，所以 $\mathbf{M}^{-1}\,\mathrm{d}\mathbf{M}/\mathrm{d}t=\mathbf{N}$，而 (ii) 給出

$$\operatorname{tr}(\mathbf{N})=\frac{1}{\det\mathbf{M}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\det\mathbf{M}).$$

所以對所有 t 有 $\operatorname{tr}\mathbf{N}=0$，當且僅當 $\det\mathbf{M}$ 是常數。跡不變並不能說明行列式的任何情況，所以答案應該是否。要證明這一點，只需一個反例（counterexample）。

> ? **想一想** 題目只透過微分方程給出 $\mathbf{N}$，我們該怎樣構造反例？

倒過來做。任取一個非奇異的 $\mathbf{M}(t)$，使其跡為非零常數而行列式不是常數，然後定義 $\mathbf{N}=\mathbf{M}^{-1}\,\mathrm{d}\mathbf{M}/\mathrm{d}t$。這樣方程便自動成立。取

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix}1 & t\\ -t & 1\end{pmatrix},\qquad \operatorname{tr}\mathbf{M}=2,\qquad \det\mathbf{M}=1+t^2\neq 0.$$

於是

$$\mathbf{N}=\mathbf{M}^{-1}\frac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix}1 & -t\\ t & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\frac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix}t & 1\\ -1 & t\end{pmatrix}.$$

乘出來可確認 $\mathbf{MN} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{d}\mathbf{M}/\mathrm{d}t$。此外 $\mathbf{N}$ 是非奇異的，因為 $\det \mathbf{N} = 1/(1+t^2)$。然而

$$\mathrm{tr}(\mathbf{N}) = \frac{2t}{1+t^2},$$

對每個 $t \neq 0$ 都不為零。所以 $\mathrm{tr}(\mathbf{N}) = 0$ 不一定成立。真正必然成立的是 $\mathrm{tr}(\mathbf{MN}) = \mathrm{tr}(\mathrm{d}\mathbf{M}/\mathrm{d}t) = 0$，這是另一回事。

驗算

- 在 (iii) 中，取 $A = 1$、$B = 0$、$C = 2$、$D = 3$ 及 $t = 1$。公式給出 $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{2} \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$，其跡為 4，行列式為 3，與 $t = 0$ 時相同。它的平方的跡是 $0 - 3 - 3 + 16 = 10$，而初始矩陣的也是：$1 + 0 + 0 + 9 = 10$。
- 對隨機的 A, B, C, D，(iii) 中 $\mathbf{M}$ 的公式與電腦數值積分該微分方程的結果吻合至小數點後八位。以隨機且隨時間變化的 $\mathbf{N}$ 進行同樣的積分時，三個不變量都保持不變。
- 在 (iv) 中，當 $t = 1$ 時，$\mathbf{N} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$，其跡為 1；而 $\det \mathbf{M} = 1 + t^2$ 在該處的對數導數（logarithmic derivative）是 $2t/(1+t^2) = 1$，正如 (ii) 所預測。

常見錯誤

- 寫成 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{M}^2) = 2\mathbf{M}\frac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}t}$：矩陣不一定可交換，所以兩種次序都必須保留。
- 以為 $\mathrm{tr}(\mathbf{MN}) = \mathrm{tr}\,\mathbf{M}\,\mathrm{tr}\,\mathbf{N}$。這是錯的。成立的只有線性法則和循環法則（cyclic rule）。
- 在 (iv) 中，由 $\mathrm{tr}(\mathbf{MN}) = 0$ 直接推出 $\mathrm{tr}(\mathbf{N}) = 0$。答「否」需要一個明確的反例。

STEP 之外

第 (ii) 部分是雅可比公式在 2×2 的情況，該公式對 $n \times n$ 矩陣都成立。配合 $\mathbf{M}' = \mathbf{MN}$，它給出 $\det \mathbf{M}(t) = \det \mathbf{M}(0) \exp \int_0^t \mathrm{tr}\,\mathbf{N}$。當 $\mathbf{N}$ 是常數時，這就變成著名的恆等式 $\det e^{\mathbf{N}} = e^{\mathrm{tr}\,\mathbf{N}}$。形如 $\mathbf{M}' = \mathbf{MN} - \mathbf{NM}$ 的方程稱為 Lax 方程（Lax equations）。$\mathrm{tr}(\mathbf{M}^k)$ 這些量總是守恆（conserved）的，這正是它們出現在可積系統（integrable systems）理論中的原因。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）是閱讀跡、行列式和矩陣指數（matrix exponential）的好去處。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。