詳細解答

STEP III 2024，第 4 題

純數學 • 拋物線的切線

> **STEP III 2024，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2024 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

關鍵思路

一切都取決於兩直線夾角的 tan 公式，而這其實只是 $\tan(A-B)$ 公式換了個面貌。一旦知道在 $x=p$ 和 $x=q$ 處的切線（tangent）相交於點 (X,Y)，而 $p+q$ 和 pq 都可以用 X 和 Y 表示，那麼任何關於夾角的條件（涉及 $(p-q)^2$ 和 pq）都可以單純用 X 和 Y 改寫。改寫後的條件就是所求的軌跡（locus）。

解答

第 (i) 部分

設兩直線與 x 軸正方向分別成 α 角和 β 角，於是 $m_1=\tan\alpha$，$m_2=\tan\beta$（兩直線都有斜率（gradient），所以都不是鉛垂線）。兩直線的夾角在不計正負號及加上 180° 的倍數的意義下等於 $\alpha-\beta$。若兩者之間的銳角為 45°，則 $\alpha-\beta$ 等於 $\pm45^\circ$ 加上 180° 的某個倍數；由於 tan 的週期為 180°，

$$\tan(\alpha-\beta)=\tan(\pm45^\circ)=\pm1.$$

特別地，$\cos(\alpha-\beta)\neq0$，所以複角公式（compound-angle formula）適用，且 $1+m_1m_2\neq0$：

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}.$$

因此 $\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}=\pm1$，得證。更一般地，兩直線之間的銳角 θ 滿足 $\tan\theta=\left|\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|$，我們會在第 (iii) 部分用到這一點。

第 (ii) 部分

在 C 上有 $y = \dfrac{x^2}{4a}$，所以 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{x}{2a}$。在 $(p, \frac{p^2}{4a})$ 處的切線為

$$y - \frac{p^2}{4a} = \frac{p}{2a}(x - p) \quad \Longleftrightarrow \quad y = \frac{p}{2a}x - \frac{p^2}{4a},$$

同樣，在 $x = q$ 處的切線為 $y = \dfrac{q}{2a}x - \dfrac{q^2}{4a}$。兩式相減，

$$\frac{p-q}{2a}\,x = \frac{p^2 - q^2}{4a} = \frac{(p-q)(p+q)}{4a}.$$

由於 $p \neq q$，可以除以 $p - q$，得 $x = \frac{1}{2}(p+q)$，得證。代入第一條切線，

$$y = \frac{p(p+q)}{4a} - \frac{p^2}{4a} = \frac{pq}{4a}.$$

所以兩切線相交於

$$(X, Y) = \left(\tfrac{1}{2}(p+q),\ \frac{pq}{4a}\right), \qquad \text{所以} \qquad p + q = 2X, \quad pq = 4aY. \tag{$*$}$$

現在假設在 $x = p$ 和 $x = q$ 處的切線互成 45°。它們顯然是不同的直線，所以 $p \neq q$，且 $(*)$ 成立。兩者的斜率為 $m_1 = \frac{p}{2a}$ 和 $m_2 = \frac{q}{2a}$，所以

$$\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \frac{(p-q)/(2a)}{1 + pq/(4a^2)} = \frac{2a(p-q)}{4a^2 + pq}.$$

由第 (i) 部分，此式等於 ± 1；平方後可消去正負號：

$$4a^2(p-q)^2 = (4a^2 + pq)^2.$$

? **想一想** 條件涉及的是 $p - q$ 而不是 $p + q$，我們怎樣消去 p 和 q？

利用 $(p-q)^2 = (p+q)^2 - 4pq$，這是對稱（symmetric）的表達式，所以可以應用 $(*)$：

$$(p-q)^2 = 4X^2 - 16aY, \qquad 4a^2 + pq = 4a^2 + 4aY = 4a(a + Y).$$

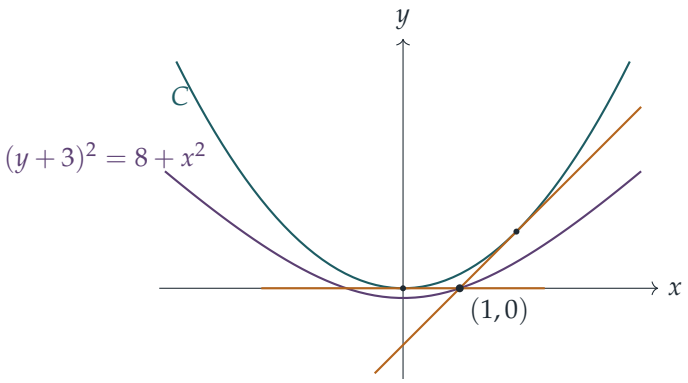
條件變成

$$4a^2\,(4X^2 - 16aY) = 16a^2(a+Y)^2.$$

兩邊除以 $16a^2$（因為 $a \neq 0$，所以可以這樣做），

$$X^2 - 4aY = Y^2 + 2aY + a^2,$$
$$\text{所以} \qquad X^2 + 8a^2 = Y^2 + 6aY + 9a^2 = (Y + 3a)^2.$$

因此交點位於 $(y + 3a)^2 = 8a^2 + x^2$ 上，得證。



取 $a = 1$：在 $x = 2$ 處（斜率 1）和 $x = 0$ 處（斜率 0）的切線互成 45°，兩者相交於 $(1, 0)$，這點位於雙曲線（hyperbola）的上支上。

第 (iii) 部分

設 (X, Y) 是 $(y + 7a)^2 = 48a^2 + 3x^2$ 上的一點，而 C 在 $x = p$ 和 $x = q$（$p \neq q$）處的兩條切線相交於此點，所以 $(*)$ 成立。根據第 (i) 部分末尾的說明，兩切線之間的銳角 θ 滿足

$$\tan^2\theta = \left(\frac{2a(p-q)}{4a^2+pq}\right)^2 = \frac{4a^2(4X^2-16aY)}{16a^2(a+Y)^2} = \frac{X^2-4aY}{(Y+a)^2},$$

這裏用了與第 (ii) 部分相同的代換。（若 $Y = -a$，兩切線會互相垂直；下面會證明這在此曲線上不可能發生。）

想一想 曲線的方程怎樣幫助我們處理 $X^2 - 4aY$？

展開曲線的方程：$Y^2 + 14aY + 49a^2 = 48a^2 + 3X^2$，即

$$3X^2 = Y^2 + 14aY + a^2.$$

於是

$$3(X^2 - 4aY) = Y^2 + 14aY + a^2 - 12aY = Y^2 + 2aY + a^2 = (Y + a)^2.$$

由此得出兩個結果。第一，$Y \neq -a$：否則 $X^2 - 4aY = 0$，即 $X^2 = -4a^2$，但 $a \neq 0$，這是不可能的。所以 $X^2 - 4aY = \frac{1}{3}(Y + a)^2 > 0$，這也確認了該點位於 C 之外：以 p 和 q 為根的二次方程 $t^2 - 2Xt + 4aY = 0$ 有兩個相異實根，所以經過曲線上每一點確實都有兩條切線。第二，

$$\tan^2\theta = \frac{\frac{1}{3}(Y+a)^2}{(Y+a)^2} = \frac{1}{3}.$$

所以無論該點位於曲線上何處，都有 $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$：兩切線之間的銳角是常數，等於 30°。

驗算

- 取 $a = 1$，在 $x = 2$ 和 $x = 0$ 處的切線分別是 $y = x - 1$ 和 $y = 0$，互成 45°。它們相交於 $(1, 0)$，而 $(0 + 3)^2 = 9 = 8 + 1^2$。
- 對於第 (iii) 部分，取 $a = 1$ 及 $X = 0$：則 $(Y + 7)^2 = 48$，所以 $Y = 4\sqrt{3} - 7 \approx -0.072$。經過 $(0, Y)$ 的切線在 $x = \pm\sqrt{-4Y} \approx \pm 0.536$ 處與曲線相切，斜率為 ± 0.268。由於 $\tan 15° \approx 0.268$，每條切線與水平線成 15°，兩者相差 30°。
- 用電腦對一千個隨機的 a 值以及每條雙曲線兩支上的點進行檢驗，確認了 45° 和 30° 的結果。

常見錯誤

- 試圖分別解出 p 和 q。其實只需要對稱組合 $p + q$ 和 pq，再配合 $(p - q)^2 = (p + q)^2 - 4pq$。
- 在第 (i) 部分忘記 $\pm$：把條件平方後，45° 角的兩種方向都得以保留，正因如此才得到單一條方程。
- 在第 (iii) 部分，約去之前沒有檢查 $Y + a \neq 0$。

STEP 之外

從點 (X, Y) 到拋物線(parabola)的切線由二次方程 $t^2 - 2Xt + 4aY = 0$ 決定，而使兩切線以固定角度相交的點的軌跡總是一條雙曲線（當角度為 90° 時，它退化為準線（directrix）$y = -a$）。這些概念屬於射影幾何（projective geometry），其中極點與極線（pole–polar）的關係把一個點與它的切點弦（chord of contact）聯繫起來。如想做更多同類型的題目，並參考如何入手的評註，可參閱 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等數學難題》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。