詳細解答

# STEP III 2024，第 3 題

純數學 • 單調函數與導數

> **STEP III 2024，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2024 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

## 關鍵思路

一切都取決於一個導數（derivative）。把 g 求導並通分後，分子（numerator）會化簡成一個關於 $x$ 的線性（linear）式子，因此它的正負一眼就能看出。與第 (iii) 部分的聯繫在於：g 恰好就是 $\ln f$ 的導數。所以 g 的正負（第 (ii) 部分的草圖把它直觀地呈現出來）決定了 f 是上升還是下降。

## 解答

### 第 (i) 部分

由於 $x > 0$，可寫成 $\ln(1+\frac{1}{x}) = \ln(x+1) - \ln x$。於是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x(x+1)} = -\frac{x(x+1)}{x^2(x+1)^2},$$

而以分母（denominator）$x^2+x$ 運用商法則（quotient rule），

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{x+c}{x^2+x} = \frac{(x^2+x)-(x+c)(2x+1)}{x^2(x+1)^2} = \frac{-x^2-2cx-c}{x^2(x+1)^2}.$$

兩式相減，$x^2$ 項互相抵消：

$$\mathrm{g}'(x) = \frac{-x^2-x+x^2+2cx+c}{x^2(x+1)^2} = \frac{(2c-1)x+c}{x^2(x+1)^2}.$$

分母為正，所以 $\mathrm{g}'(x)$ 的正負與 $N(x) = (2c-1)x + c$ 的正負相同。

**(a)** 若 $c \geq \frac{1}{2}$，則 $(2c-1)x \geq 0$ 且 $c \geq \frac{1}{2} > 0$，所以對每個 $x > 0$ 都有 $N(x) > 0$。因此對所有 $x > 0$，斜率（gradient）均為正。

**(b)** 若 $0 \le c < \frac{1}{2}$，則 $1-2c>0$，而

$$N(x)<0 \iff (1-2c)x > c \iff x > \frac{c}{1-2c}.$$

所以斜率為負當且僅當 $x > \dfrac{c}{1-2c}$。（當 $c=0$ 時，這就是所有 $x>0$。）記 $x_0 = \dfrac{c}{1-2c}$。當 $c>0$ 時，g 在 $(0, x_0]$ 上遞增，在 $[x_0, \infty)$ 上遞減。

### 第 (ii) 部分

我們還需要知道 $x$ 很大時的情況。g 的兩項都趨向 0，所以 $\mathrm{g}(x) \to 0$，但草圖應該顯示它從哪一側趨近。利用 $\ln(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \cdots$，取 $t = \frac{1}{x}$，再加上 $\dfrac{x+c}{x(x+1)} = \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{c}{x^2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{x} + \cdots\right) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{c-1}{x^2} + \cdots$，得到

$$\mathrm{g}(x) = \frac{\frac{1}{2} - c}{x^2} + \cdots \quad \text{對很大的} x.$$

**想一想** 若 g 遞增並趨向 0，它必定位於軸的哪一側？

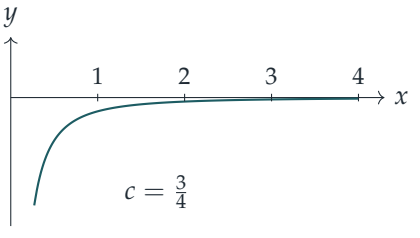
它必定在軸下方。若 g 嚴格遞增，則對任何 $x$，所有 $y > x$ 都有 $\mathrm{g}(x) < \mathrm{g}(y)$；令 $y \to \infty$ 便得 $\mathrm{g}(x) < 0$（嚴格不等，因為 $\mathrm{g}(x) < \mathrm{g}(x+1) \le 0$）。同理，一個趨向 0 的嚴格遞減函數必定為正。

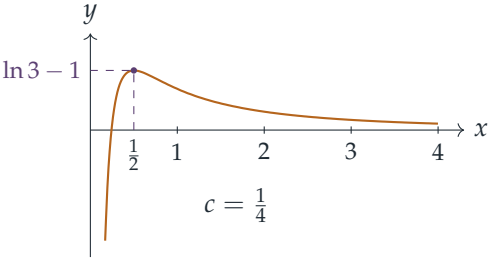
**(a)** $c = \frac{3}{4}$。由 (i)(a)，g 處處遞增。它從 $-\infty$（當 $x \to 0$）上升趨向 0，並一直留在軸下方。它以 $-\frac{1}{4x^2}$ 的方式趨近，所以永不穿過軸，也沒有轉向點。例如 $\mathrm{g}(1) = \ln 2 - \frac{7}{8} \approx -0.18$。

**(b)** $c = \frac{1}{4}$。這時 $x_0 = \dfrac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}$。曲線從 $-\infty$ 上升至 $x = \frac{1}{2}$ 處的極大值，其中

$$\mathrm{g}\left(\tfrac{1}{2}\right) = \ln 3 - \frac{3/4}{3/4} = \ln 3 - 1 \approx 0.099 > 0.$$

之後它從上方以 $\frac{1}{4x^2}$ 的方式遞減趨向 0。在 $[\frac{1}{2}, \infty)$ 上它遞減至 0，所以在那裏為正。在 $(0, \frac{1}{2})$ 上它從 $-\infty$ 遞增至一個正值，所以恰好穿過軸一次，位置略小於 $\frac{1}{4}$（數值上 $x \approx 0.243$）。



（兩圖的縱向比例不同：右圖經過拉伸，好讓那個細小的正值隆起看得見。兩圖中 $y$ 軸都是漸近線（asymptote）。）

### 第 (iii) 部分

由於對 $x > 0$ 有 $\mathrm{f}(x) > 0$，我們可以取對數（logarithm）：

$$\ln \mathrm{f}(x) = (x + c) \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

用積法則（product rule）求導，並利用 (i) 中的導數，

$$\frac{\mathrm{f}'(x)}{\mathrm{f}(x)} = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + (x + c) \cdot \left(-\frac{1}{x(x+1)}\right) = \mathrm{g}(x).$$

所以 $\mathrm{f}'(x) = \mathrm{f}(x)\,\mathrm{g}(x)$，又因 $\mathrm{f}(x) > 0$，$\mathrm{f}'$ 與 g 同號。另外留意，對每個 $c$，當 $x \to \infty$ 時 $\mathrm{g}(x) \to 0$，因為它的兩項都趨向 0。

**(a)** $c \geq \frac{1}{2}$。由 (i)(a)，g 在 $x > 0$ 上嚴格遞增並趨向 0。由 (ii) 中方框之後的論證，對所有 $x > 0$ 有 $\mathrm{g}(x) < 0$。因此 $\mathrm{f}'(x) < 0$，f 是遞減的。

**(b)** $0 < c < \frac{1}{2}$。由 (i)(b)，g 在 $[x_0, \infty)$ 上嚴格遞減並趨向 0，所以在那裏 $\mathrm{g} > 0$；特別地 $\mathrm{g}(x_0) > 0$。在 $(0, x_0]$ 上，g 連續（continuous）且嚴格遞增，而當 $x \to 0$ 時 $\mathrm{g}(x) \to -\infty$（題目已給出，因為 $c > 0$）。因此它恰好在一點 $x_1 \in (0, x_0)$ 取值 0，並在 $(0, x_1)$ 上 $\mathrm{g} < 0$，在 $(x_1, \infty)$ 上 $\mathrm{g} > 0$。所以 $\mathrm{f}'(x_1) = 0$，而 $\mathrm{f}'$ 在該處由負變正。因此 f 在 $x_1$ 有一個轉向點（turning point）（極小值）。

> ? **想一想** 為甚麼單憑 $\mathrm{f}'(x_1) = 0$ 並不足夠？

駐點（stationary point）不一定是轉向點（想想 $y = x^3$ 在原點的情況）。令 $x_1$ 成為轉向點的，是 $\mathrm{f}'$ 的變號，而這正是 g 的形狀所提供的。

**(c)** $c = 0$。這時對所有 $x > 0$ 有 $\mathrm{g}'(x) = \dfrac{-x}{x^2(x+1)^2} < 0$，所以 g 嚴格遞減並趨向 0。因此對所有 $x > 0$ 有 $\mathrm{g}(x) > 0$，於是 $\mathrm{f}'(x) > 0$，而 $\mathrm{f}(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ 是遞增的。

## 驗算

- 在某一點以數值方法對 g 求導，例如 $x = 1$、$c = \frac{1}{4}$：公式給出 $\mathrm{g}'(1) = \frac{-1/2+1/4}{4} = -\frac{1}{16}$，與差商（difference quotient）吻合。
- $c = \frac{1}{4}$：$\mathrm{g}(0.2) \approx -0.083$ 而 $\mathrm{g}(0.3) \approx 0.056$，與在 0.243 附近唯一一次穿過軸一致。對 $c = \frac{3}{4}$，$\mathrm{g}(3) \approx -0.025$，仍然剛好在軸下方。
- 在 (iii)(b) 中取 $c = \frac{1}{4}$，f 的極小值位於同一個 $x \approx 0.243$；用電腦在細密網格上檢查 f，對 $(0, \frac{1}{2})$ 中多個 $c$ 值都恰好找到一個轉向點。

- 對 $c = 0$，$\mathrm{f}(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$ 遞增至 e；對 $c = 1$，$(1 + \frac{1}{x})^{x+1}$ 遞減至 e。這正是大家熟悉、從兩邊夾住 e 的那對數列（sequences）。

## 常見錯誤

- 單憑「g 遞增」就斷定 $\mathrm{g} < 0$。你還需要當 $x \to \infty$ 時的極限 $\mathrm{g} \to 0$。
- 在 (ii)(b) 中把曲線畫成一直為負。極大值 $\ln 3 - 1$ 雖小但為正，所以曲線必須穿過軸，然後從上方回落趨近軸。
- 對 $(1 + \frac{1}{x})^{x+c}$ 求導時把指數當作常數。應先取對數。

## STEP 之外

$(1 + \frac{1}{x})^x$ 遞增而 $(1 + \frac{1}{x})^{x+1}$ 遞減、兩者都趨向 e，這是大學一年級證明定義 e 的極限存在的經典方法。它是單調收斂定理（monotone convergence theorem）的一個例子。這道題找出了行為轉變的精確臨界值 $c = \frac{1}{2}$，而展開式 $\mathrm{g}(x) \approx (\frac{1}{2} - c)/x^2$ 解釋了原因。想進一步了解單調數列與極限，可以讀 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。